DUDEN

LEARN ATTACK MATHEMATIK

TOPTHEMEN OBERSTUFE

DER SICHERE WEG ZUM ABITUR

Duden

LEARN ATTACK MATHEMATIK

Dudenverlag
Berlin

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

 D C B A
Bibliographisches Institut GmbH, Mecklenburgische Straße 53, 14197 Berlin

Redaktionelle Leitung Anika Donner
Redaktion Dr. Wiebke Salzmann

Herstellung Ursula Fürst
Layout Sigrid Hecker, Mannheim
Umschlaggestaltung SIRUP GmbH & Co. KG, Berlin
Satz Katrin Kleinschrot, Stuttgart
Druck und Bindung Mohn Media Mohndruck GmbH
Carl-Bertelsmann-Straße 161M, 33311 Gütersloh
Printed in Germany

ISBN 978-3-411-77002-1
Auch als E-Book erhältlich unter: ISBN 978-3-411-91013-7
www.duden.de

Inhalt

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses Buch aus der „Learn Attack“-Reihe unterstützt dich optimal während der gesamten Oberstufe, aber auch gezielt bei der Abiturvorbereitung im Fach Mathematik.

Du findest alle relevanten Themen der Sekundarstufe II verständlich erklärt und auf das Wesentliche konzentriert:

- Untersuchung und Rekonstruktion von Funktionen
- Extremwertaufgaben
- Integralrechnungen
- Lineare Algebra
- Analytische Geometrie
- Zufallsexperimente und Zufallsgrößen

Anhand von Beispielaufgaben wird dir schrittweise und somit nachvollziehbar der zentrale Stoff der Oberstufe erklärt. Zu jedem Bereich gibt es einzelne Aufgaben, mit denen du selbstständig arbeiten und zuvor Gelerntes einüben kannst.

Die ausführlichen Lösungen zu den einzelnen Aufgaben findest du am Ende des Buches.

Viel Erfolg!

Schnittpunkte, Tangenten und Normalen

1 Schnittpunkte von zwei Funktionsgraphen

- Schnittpunkte von f(x) und g(x) berechnen

2 Tangentengleichung

- Ableitung als Steigung einer Funktion und einer Tangente
- Ableitungsregeln
- Ableitung von f(x) und g(x) bestimmen
- Tangentengleichung
- Tangentengleichung zu bekanntem Berührpunkt aufstellen

3 Berührpunkte und Tangentengleichung ermitteln

- Berührpunkte berechnen
- Tangentengleichung aufstellen

4 Schnittwinkel bestimmen

- Schnittwinkel von zwei Funktionsgraphen
- Schnittwinkel der Graphen von f(x) und g(x) bestimmen

5 Normalen ermitteln

- Normalen und Normalengleichung
- Normale zu f(x) in x_0 bestimmen
- Normale zu g(x) in $x_{01} = 2$ bestimmen

MATERIAL

Tangenten und Schnittwinkel zweier Funktionsgraphen

Gegeben seien die Funktionen: $f(x) = x^2$ und $g(x) = (x-2)^2$.

a) Bestimme den Schnittpunkt der Funktionsgraphen.

b) Es sei x_0 der x-Wert des Schnittpunktes der beiden Graphen. Stelle die Tangentengleichungen für die Tangenten an f(x) und g(x) in x_0 auf.

c) Stelle die Gleichung(en) für die Tangente(n) an g(x) auf, die durch den Ursprung geht / gehen.

d) Bestimme den Winkel, unter dem sich die Funktionsgraphen schneiden.

e) Bestimme die Normale zu f(x) in x_0 sowie die Normale zu g(x) im Berührpunkt $x_{01} = 2$ der Tangente aus Aufgabe c).

1 Schnittpunkte von zwei Funktionsgraphen

Schnittpunkte von f(x) und g(x) berechnen (Material a)

Der Schnittpunkt der Graphen zweier Funktionen wird ermittelt, indem die Funktionsterme gleich gesetzt und nach x aufgelöst werden. Die Lösung ist das gesuchte x_0:

$x^2 = (x-2)^2 \Leftrightarrow x^2 = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow -4x + 4 = 0 \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1$

$\Rightarrow$ Die Graphen schneiden sich bei $x_0 = 1$. Die zugehörigen Funktionswerte sind:

$f(1) = g(1) = 1 \Rightarrow$ Der Schnittpunkt ist $S(1|1)$.

2 Tangentengleichung

WISSEN **Ableitung als Steigung einer Funktion und einer Tangente**

Die Ableitung einer Funktion gibt an, welche Steigung die Funktion in einem gegebenen Punkt hat. Um diese Steigung grafisch zu verdeutlichen, kann man auch ein Stück einer Geraden einzeichnen, die die Funktion an der betrachteten Stelle berührt. Diese „berührende“ Gerade nennt man Tangente an die Funktion.

Um die Gleichung einer Tangente zu ermitteln, benötigt man daher die Steigung, d. h. die Ableitung der Funktion.

WISSEN **Ableitungen wichtiger Funktionen**

Funktion	Ableitung	Funktion	Ableitung
x^a $(a \in \mathbb{R})$	$a \cdot x^{a-1}$	e^x	e^x
$\sqrt{x}$ $(x \geq 0)$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	a^x $(a \in \mathbb{R}, a > 0)$	$\ln(a) \cdot a^x$
$\ln(x)$ $(x > 0)$	x^{-1}	$\sin(x)$	$\cos(x)$
		$\cos(x)$	$-\sin(x)$

WISSEN **Ableitungsregeln**

- **Linearität der Ableitung:**
  $(a_1f_1(x) + a_2f_2(x) + \dots + a_nf_n(x))' = a_1f_1'(x) + a_2f_2'(x) + \dots + a_nf_n'(x)$
  (Summen von Funktionen summandenweise ableiten und konstante Vorfaktoren „mitschleppen“.)
- **Produktregel:** $(f \cdot g)'(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$
- **Quotientenregel:** $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
- **Kettenregel:** $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ („äußere Ableitung mal innere Ableitung“)

AUFGABE 1 *Bestimme die Ableitungen der folgenden Funktionen.*

a) $f(x) = 2x \cdot \cos x^2$

b) $f(x) = \sqrt{1 - x^2} \cdot \sin x$

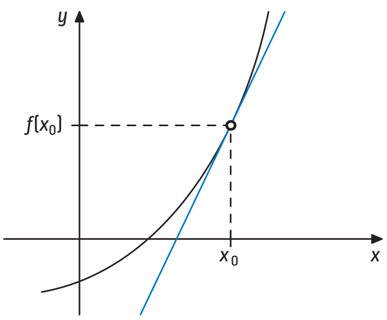
c) $f(x) = \frac{3x + 5}{(x + 1)^2}$

Ableitung von f(x) und g(x) bestimmen (Material b)

Die Steigung in jedem Punkt des Graphen wird durch die Ableitungsfunktion $f'(x)$ bzw. $g'(x)$ beschrieben. Zur Ermittlung der Tangentengleichungen werden daher zunächst die Ableitungen der Funktionen gebildet.
Die Ableitung von $f(x)$ liest man aus der Tabelle (s. S. 6) ab:
$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot x^{2-1} = 2x.$
Die Ableitung von $g(x)$ bildet man mit der Kettenregel:
$g(h(x)) = (x - 2)^2 \Rightarrow h(x) = x - 2;\ h'(x) = 1;\ g(h) = h^2,\ g'(h) = 2h$
$\Rightarrow g'(h) \cdot h'(x) = 2h \cdot 1 \Rightarrow 2(x - 2) = 2x - 4.$

WISSEN **Tangentengleichung**

Es sei f eine an einer Stelle x_0 differenzierbare reelle Funktion. Als Tangente an f in x_0 bezeichnet man diejenige Gerade, die f im Kurvenpunkt $(x_0|f(x_0))$ berührt, die also an der Stelle x_0 denselben Funktionswert und dieselbe Steigung wie f hat.



Ist f eine in x_0 differenzierbare Funktion und bezeichnet man den Funktionswert von f in x_0 mit y_0, so lautet die Gleichung der Tangente $t(x)$ an f in x_0:
$t(x) = f'(x_0) \cdot x + y_0 - f'(x_0) \cdot x_0.$
Diese Formel lässt sich wie folgt herleiten: Die Tangente ist eine Gerade, hat also eine Gleichung der Form $t(x) = mx + b$. Da die Steigung m gleich derjenigen von f in x_0 sein muss, gilt $m = f'(x_0)$, und da der Funktionswert $t(x_0)$ gleich y_0 sein muss, gilt
$y_0 = f'(x_0) \cdot x_0 + b$, also $b = y_0 - f'(x_0) \cdot x_0$.
Das ergibt genau die oben angegebene Formel.

Tangentengleichung zu bekanntem Berührpunkt aufstellen (Material b)

Die Ableitungsfunktionen f'(x) und g'(x) wurden bereits bestimmt. Die Tangenten sollen den Schnittpunkt der beiden Funktionsgraphen berühren, dieser ist also der Berührpunkt für beide Tangenten. Benötigt werden die Werte der Ableitungsfunktionen $f'(x_0)$ und $g'(x_0)$ im Berührpunkt, also im Schnittpunkt S(1|1):
$x_0 = 1$; $y_0 = 1$.
Tangente an f(x) in S:
$f'(x_0) = 2x_0 = 2 \Rightarrow t_f(x) = 2x + 1 - 2 \cdot 1 = 2x - 1$
Tangente an g(x) in S:
$g'(x_0) = 2x_0 - 4 = 2 - 4 = -2 \Rightarrow t_g(x) = (-2)x + 1 - (-2) \cdot 1 = -2x + 3$

3 Berührpunkte und Tangentengleichung ermitteln

WISSEN **Berechnung der Berührpunkte**

Es sei f eine differenzierbare Funktion, $P(x_P|y_P)$ ein nicht auf der Kurve liegender Punkt und t(x) eine Tangente an f durch P. Dann berechnet man die Koordinaten $(x_0|y_0)$ des Berührpunktes von t und f durch Auflösen der Gleichung: $y_P - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x_P - x_0)$.

Berührpunkte berechnen (Material c)

Die Tangente an g(x) soll durch den Ursprung gehen, es ist also: P(0|0) und $x_P = y_P = 0$.
Damit wird die Gleichung zur Ermittlung des Berührpunktes $y_P - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x_P - x_0)$ (siehe Wissen) zu:
$-g(x_0) = g'(x_0) \cdot (-x_0)$.
Einsetzen der Funktionsterme von g(x) und g'(x) für $x = x_0$ in die Gleichung ergibt:
$-(x_0 - 2)^2 = (2x_0 - 4) \cdot (-x_0)$.
Diese Gleichung muss nach x_0 aufgelöst werden. Man erhält die quadratische Gleichung:
$x_0^2 - 4 = 0$ und damit $x_{01} = 2$ und $x_{02} = -2$.
Es gibt zwei Berührpunkte, also zwei Tangenten an g(x), die durch den Ursprung gehen.

Tangentengleichung aufstellen (Material c)

Um nun die Tangentengleichungen $t(x) = g'(x_0) \cdot x + y_0 - g'(x_0) \cdot x_0$ aufzustellen, geht man vor wie in Aufgabe b). Man benötigt die Steigungen und die Funktionswerte (y_0) in den Berührpunkten x_{01} und x_{02}:
$g'(2) = 2 \cdot 2 - 4 = 0$; $g(2) = y_{01} = (2 - 2)^2 = 0$
$t_1(x) = 0 \cdot x + 0 - 0 \cdot 2 = 0$
Diese Tangente ist eine waagerechte Gerade, die genau auf der x-Achse liegt, denn sie hat die Steigung 0 und ihre Funktionswerte sind überall 0.
$g'(-2) = 2 \cdot (-2) - 4 = -8$; $g(-2) = y_{02} = ((-2) - 2)^2 = 16$
$t_2(x) = -8x + 16 - (-8) \cdot (-2) = -8x$

AUFGABE 2 *Bestimme die Gleichung aller möglichen Tangenten an die Funktion $f(x) = 3x + 1$ durch den Punkt (1|1).*
Tipp: Eine Gerade ist ihre eigene Tangente, und zwar in jedem beliebigen Punkt dieser Geraden.

4 Schnittwinkel bestimmen

WISSEN **Schnittwinkel von zwei Funktionsgraphen**

Schneiden sich die Graphen zweier Funktionen f_1 und f_2 an einer Stelle x_0, so wird der Schnittwinkel der beiden Graphen definiert als der nicht stumpfe Winkel φ, den die beiden Tangenten im Schnittpunkt einschließen. Sind m_1 und m_2 die zugehörigen Tangentensteigungen, so gilt für φ:

$$\tan\varphi = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right| = \left|\frac{f'_1(x_0) - f'_2(x_0)}{1 + f'_1(x_0) \cdot f'_2(x_0)}\right|$$

Schnittwinkel der Graphen von f(x) und g(x) bestimmen (Material d)

Da die Steigungen der beiden Funktionen f(x) und g(x) bereits berechnet wurden, kann der Schnittwinkel anhand der Formel sofort berechnet werden (Schnittpunkt: S(1|1)):

$$\tan\varphi = \left|\frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0) \cdot g'(x_0)}\right| = \left|\frac{f'(1) - g'(1)}{1 + f'(1) \cdot g'(1)}\right| = \left|\frac{2 - (2 - 4)}{1 + 2 \cdot (2 - 4)}\right| = \left|\frac{4}{3}\right| = \frac{4}{3}$$

$\Rightarrow \varphi \approx 53°$.

5 Normalen ermitteln

WISSEN **Normalen und Normalengleichung**

Als Normale n in einem Punkt $P(x_0|f(x_0))$ des Graphen der Funktion bezeichnet man diejenige Gerade durch P, die auf der Tangente senkrecht steht.
Für die Steigung m_n der Normalen gilt:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_0)} \text{ mit } f'(x_0) \neq 0.$$

Die Gleichung der Normalen lautet:

$$n(x) = \frac{-1}{f'(x_0)} \cdot x + y_0 + \frac{x_0}{f'(x_0)}.$$

Für $f'(x_0) = 0$ ist die Normale eine senkrechte Gerade mit der Gleichung $x = x_0$.

Normale zu f(x) in x_0 bestimmen (Material e)

Die Gleichung der Normalen zur Funktion $f(x) = x^2$ in $x_0 = 1$ (Schnittpunkt) ist:

$$f'(1) = 2;\ y_0 = f(1) = 1 \Rightarrow n(x) = \frac{-1}{2} \cdot x + 1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{2}.$$

Normale zu g(x) in $x_{01} = 2$ bestimmen (Material e)

Die Normale zur Tangente $t_1(x) = 0$ ist die senkrechte Gerade $x = 2$, denn die Tangente ist eine Waagerechte mit der Steigung 0 und der Berührpunkt liegt bei $x_{01} = 2$.

AUFGABE 3

a) Gegeben sei die Funktion $f(x) = 3x^3 - x^2 - 1$. Prüfe, ob die durch die beiden Punkte (−1|2) und (3|−1) verlaufende Gerade eine Normale zu f an der Stelle $x_0 = 1$ ist.

b) Für welchen Wert des Parameters a hat die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - a^2x + 1$ an genau einer Stelle eine waagerechte Tangente? Gib die Gleichung dieser Tangente an.

SCHNITTPUNKTE, TANGENTEN UND NORMALEN

DUDEN

MIT DEN TOPTHEMEN DER OBERSTUFE SICHER ZUM ABITUR!

Alle relevanten Mathethemen in einem Band:

- Untersuchung von Funktionen
- Rekonstruktion von Funktionen
- Extremwertaufgaben
- Integralrechnungen
- Lineare Algebra
- Analytische Geometrie
- Zufallsexperimente
- Zufallsgrößen

Mit „Schritt für Schritt"-Anleitung für jedes Thema, zahlreichen Übungen und ausführlichem Lösungsteil.

Ideal für alle Grund- und Leistungskurse.
Geeignet für alle Bundesländer.

www.duden.de

ISBN 978-3-411-77002-1
9,99 € (D) · 10,30 € (A)
9 783411 770021