Mathematik für das Lehramt

LEHRBUCH

Gerd Fischer
Matthias Lehner
Angela Puchert

Einführung in die Stochastik

Die grundlegenden Fakten mit zahlreichen Erläuterungen, Beispielen und Übungsaufgaben

2. Auflage

Springer Spektrum

Mathematik für das Lehramt

LEHRBUCH

Gerd Fischer
Matthias Lehner
Angela Puchert

Einführung in die Stochastik

Die grundlegenden Fakten mit zahlreichen Erläuterungen, Beispielen und Übungsaufgaben

2. Auflage

Springer Spektrum

Mathematik für das Lehramt

Herausgegeben von
Kristina Reiss, Technische Universität München
Thomas Sonar, Technische Universität Braunschweig
Hans-Georg Weigand, Universität Würzburg

Die Mathematik hat sich zu einer Schlüssel- und Querschnittswissenschaft entwickelt, die in vielen anderen Wissenschaften, der Wirtschaft und dem täglichen Leben eine bedeutende Rolle einnimmt. Studierende, die heute für das Lehramt Mathematik ausgebildet werden, werden in den nächsten Jahrzehnten das Bild der Mathematik nachhaltig in den Schulen bestimmen. Daher soll nicht nur formal-inhaltlich orientiertes Fachwissen vermittelt werden. Vielmehr wird großen Wert darauf gelegt werden, dass Studierende exploratives und heuristisches Vorgehen als eine grundlegende Arbeitsform in der Mathematik begreifen.

Diese neue Reihe richtet sich speziell an Studierende im Haupt- und Nebenfach Mathematik für das gymnasiale Lehramt (Sek. II) sowie in natürlicher Angrenzung an Studierende für Realschule (Sek. I) und Mathematikstudenten (Diplom/BA) in der ersten Phase ihres Studiums. Sie ist grundlegenden Bereichen der Mathematik gewidmet: (Elementare) Zahlentheorie, Lineare Algebra, Analysis, Stochastik, Numerik, Diskrete Mathematik etc. und charakterisiert durch einen klaren und prägnanten Stil sowie eine anschauliche Darstellung. Die Herstellung von Bezügen zur Schulmathematik („Übersetzung“ in die Sprache der Schulmathematik), von Querverbindungen zu anderen Fachgebieten und die Erläuterung von Hintergründen charakterisieren die Bücher dieser Reihe. Darüber hinaus stellen sie, wo erforderlich, Anwendungsbeispiele außerhalb der Mathematik sowie Aufgaben mit Lösungshinweisen bereit.

Mathematik für das Lehramt

K. Reiss/G. Schmieder†: Basiswissen Zahlentheorie
A. Büchter/H.-W. Henn: Elementare Stochastik
J. Engel: Anwendungsorientierte Mathematik: Von Daten zur Funktion
K. Reiss/G. Stroth: Endliche Strukturen
O. Deiser: Analysis 1
O. Deiser: Analysis 2
M. Falk/J. Hain/F. Marohn/H. Fischer/R. Michel: Statistik in Theorie und Praxis

Herausgeber:
Kristina Reiss, Thomas Sonar, Hans-Georg Weigand

Gerd Fischer · Matthias Lehner ·
Angela Puchert

Einführung in die Stochastik

Die grundlegenden Fakten mit zahlreichen Erläuterungen, Beispielen und Übungsaufgaben

2., neu bearbeitete Auflage

Springer Spektrum

Gerd Fischer
Angela Puchert
Zentrum Mathematik
Technische Universität München
Garching, Deutschland

Matthias Lehner
TUM School of Education
Technische Universität München
München, Deutschland

ISBN 978-3-658-07902-4
ISBN 978-3-658-07903-1 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-07903-1

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum
Die erste Auflage diese Buches erschien unter dem Titel „Fischer, Stochastik einmal anders".
© Springer Fachmedien Wiesbaden 2005, 2015
Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Vorwort

Es ist alles schon gesagt,
nur noch nicht von allen.
KARL VALENTIN

Es vergeht kaum ein Tag, an dem die Medien nicht über neue Umfragen und Statistiken berichten würden: Politbarometer, Wahlumfragen, Konsumklimaindizes, PISA-Studien, Medizinische Studien und vieles mehr. Grundlage für die Ergebnisse sind meist die Antworten auf Umfragen oder die Werte von Messungen, beides von begrenztem Umfang, in diesen Fällen spricht man von „Stichproben". Daraus werden dann mit mehr oder weniger Berechtigung allgemein gültige Schlüsse gezogen. Die dabei verwendeten theoretischen Hilfsmittel stammen aus der Mathematik – genauer gesagt der „Stochastik", einer Kombination von Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die Einzelheiten der Verfahren werden selten offen gelegt und sind ohnehin meist nur Experten verständlich; die plakativen Ergebnisse dagegen haben oft deutliche und nicht immer gerechtfertigte Auswirkungen. Zahlreiche Beispiele für irreführende Statistiken finden sich in dem „Klassiker" *So lügt man mit Statistik* von W. KRÄMER [KRÄ].

Innerhalb der Mathematik ist aus der elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik im Lauf des 20. Jahrhunderts ein eindrucksvolles theoretisches Gebäude geworden, mit sehr komplexen Anwendungen, etwa in der Finanzmathematik. Wegen der großen Bedeutung dieses Teiles der angewandten Mathematik haben die wichtigsten einfachen Grundlagen auch Eingang gefunden in die Lehrpläne von Schulen aller Art. Um die Lehrkräfte darauf vorzubereiten, ihren Schülern diese Themen in anregender und verständlicher Form zu vermitteln, müssen sie im Lauf ihres Studiums angemessen darauf vorbereitet werden. „Angemessen" bedeutet – ganz kurz gesagt – mathematisch präzise, aber möglichst konkret, auf einem nicht zu hohen Niveau der Abstraktion. Aus Lehrveranstaltungen an der Technischen Universität München für Studierende des Lehramts mit dieser Zielsetzung ist unser Buch entstanden. Darüber hinaus kann es aber allen anderen Interessenten an einer ersten Einführung in die Methoden und Ergebnisse der Stochastik eine gute Hilfe sein.

Die Themen unseres Buches sind nach einem weit verbreiteten Muster angeordnet. Wir beginnen mit der „Beschreibenden Statistik", in der vorliegende Daten oder Messreihen analysiert werden. Das Kapitel handelt von Häufigkeiten, Mittelwerten, Streuungsmaßen und führt bis zum Vergleich von Merkmalen mit Hilfe der Regressionsrechnung. Dieses Vorgehen ermöglicht einen sehr elementaren Einstieg in die Welt der Daten, und ist noch frei vom Begriff der Wahrscheinlichkeit, aber doch eine gute Vorbereitung darauf.

Im längsten Kapitel „Wahrscheinlichkeitsrechnung“ wird der Begriff der Wahrscheinlichkeit axiomatisch eingeführt, aber zunächst nur im besonders einfachen Fall endlicher Ergebnismengen. Dadurch kann man mit relativ geringem theoretischem Aufwand schon viele interessante Beispiele behandeln. Höhepunkt ist die Normalverteilung und ihre Bedeutung als Grenzwert und damit Hilfsmittel für einfache approximative Berechnungen. Für Leser mit weitergehenden Interessen werden in den beiden letzten Abschnitten in Form eines „Steilkurses“ überabzählbare Ergebnismengen und stetige Verteilungen, sowie Gesetze großer Zahlen behandelt.

Die letzten beiden Kapitel über Schätzungen und Tests geben eine Einführung in die sogenannte „Schließende Statistik“, bei der – grob gesprochen – überlegt wird, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Ergebnisse von Stichproben auf eine Gesamtheit übertragen werden können. Besonders problematisch dabei ist der Begriff einer „repräsentativen“ Stichprobe. Als Beispiel aus der aktuellen Praxis kann man sich den Anstich – oder in der üblichen Terminologie das Anzapfen – eines Bierfasses vorstellen: Der Gehalt an Alkohol und Stammwürze in der ersten Maß wird ziemlich genau mit dem entsprechenden Gehalt im ganzen Fass übereinstimmen. Bei Wahlumfragen ist ein solcher „repräsentativer Anstich“ weit schwieriger. Die Theorie der auf Stichproben gegründeten Schätzungen und Tests ist sicher der für die Anwendungen wichtigste Teil der Stochastik, und ihr Verständnis kann dazu dienen, den kritischen Blick auf die vielen Ergebnisse von Umfragen und Studien zu schärfen.

In der Darstellung haben wir versucht, uns an einem bewährten didaktischen Prinzip zu orientieren, das aus mehreren Schritten besteht: Zu Beginn stehen konkrete Fragestellungen, dazu wird ein passendes mathematischen Gerüst gebaut, dann wird damit ein Ergebnis berechnet. Und schließlich – im letzten Schritt – wird versucht, die berechneten Zahlenwerte zu verstehen und zu interpretieren. Gerade dieser letzte und besonders wichtige Schritt wird in der Schule oft vernachlässigt: Schüler sind meist schon zufrieden, wenn der berechnete Zahlenwert korrekt ist, egal was er bedeutet. Auf diese Weise werden die Ziele eines Unterrichts in Stochastik aber nicht erreicht. Interessant wird es erst dann, wenn man etwa überlegt, wie sich Veränderungen eines Parameters – wie etwa des Stichprobenumfangs – auf den Zahlenwert des Ergebnisses und damit seine Bedeutung auswirken.

Um das Verständnis für die Methoden der Stochastik zu erleichtern, besteht fast die Hälfte des Textes aus Beispielen. Sie werden oft in mehreren Varianten durchgerechnet, damit der Leser ein Gefühl für die Dynamik der verwendeten Formeln erhält. Diesem Zweck dient auch eine große Zahl von Abbildungen: ein Bild zeigt oft mehr als eine Formel. Schließlich soll eine Sammlung von Übungsaufgaben dazu dienen, den Leser zu selbstständiger Arbeit anzuregen und dadurch das Verständnis zu vertiefen. Mit historischen Anmerkungen sind wir sehr sparsam umgegangen. Lesern mit Interesse an der Entwicklung der Stochastik von den ersten Anfängen bei der Analyse von Glücksspielen bis hin zur rasanten Entwicklung auf der Grundlage der Maßtheorie im 20. Jahrhundert empfehlen wir zum Beispiel das Buch von [SC].

An Texten, aus denen wir selbst viel gelernt haben, seien in erster Linie die Lehrbücher von U. KRENGEL [KRE], N. HENZE [HE] und H.-O. GEORGII [GEO] genannt; diese haben in unserer Darstellung Spuren hinterlassen. Darüber hinaus haben wir bei einigen schwierigeren und hier nicht ausgeführten Beweisen auf diese Bücher verwiesen. Unser besonderer Dank gilt KLAUS JANSSEN, HANNS KLINGER und SILKE ROLLES für wertvolle Hinweise, JUTTA NIEBAUER für die vorzügliche Gestaltung des Textes, KRISTINA REISS und der Telekom-Stiftung für ihre Unterstützung und schließlich ULRIKE SCHMICKLER-HIRZEBRUCH vom Verlag für ihre sorgfältige Betreuung dieses Projekts.

München, im Oktober 2014

Gerd Fischer
gfischer@ma.tum.de

Matthias Lehner
matthias.lehner@tum.de

Angela Puchert
puchert@ma.tum.de

Inhalt

Kapitel 1

Beschreibende Statistik

1.1 Merkmale und Häufigkeiten

Es gibt unzählige Arten von Daten, die etwa durch Messungen, Umfragen oder Bewertungen entstehen: Temperaturen im Laufe der Zeit, Wahlumfragen oder Bewertungen von Klausuren, um nur einige Beispiele zu nennen. Zunächst wird in diesem Abschnitt der Rahmen für eine mathematische Beschreibung aufgezeigt. Dann folgt in einem ersten Schritt eine komprimierte Darstellung der Ergebnisse mit Hilfe des Begriffs der Häufigkeit.

1.1.1 Merkmale

Beispiel
Bei den Hörern einer Vorlesung kann man durch eine Umfrage folgende Informationen ermitteln:

1) Wohnort
2) Interesse an Stochastik, etwa auf einer Skala von „gar nicht" bis „sehr groß"
3) Semesterzahl
4) Körpergröße

Der abstrakte Hintergrund kann so beschrieben werden: Die n Hörer der Vorlesung sind die Elemente einer Menge

$$M := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$$

von ***Individuen***. Die möglichen Antworten auf die gestellten Fragen sind enthalten in einer Menge A von ***Ausprägungen***.

© Springer Fachmedien Wiesbaden 2015
G. Fischer, M. Lehner, A. Puchert, *Einführung in die Stochastik*, Mathematik für das Lehramt,
DOI 10.1007/978-3-658-07903-1_1

Unter einem ***Merkmal*** (oder genauer der *Erhebung eines Merkmals*) versteht man nun eine Abbildung

$$X\colon M \to A, \quad \alpha \mapsto X(\alpha),$$

von einer endlichen Menge M von Individuen in eine Menge A von Ausprägungen.

In den Beispielen 1) und 2) nennt man die Merkmale ***qualitativ***. Man kann die möglichen Antworten zur Vereinfachung durch Zahlen codieren, etwa die Wohnorte in Beispiel 1) durch Postleitzahlen. Die Größe dieser Zahlen ergibt aber keine sinnvolle Rangordnung der Wohnorte, ein solches qualitatives Merkmal wird ***nominal*** genannt. In Beispiel 2) kann man die möglichen Antworten von „gar nicht“, bis „sehr groß“ durch die Zahlen $\{0,...,5\}$ darstellen. Hier hat man eine natürliche Rangordnung, ein solches qualitatives Merkmal heißt ***ordinal***. Dabei muss man allerdings bedenken, dass die Abstände mit der Skala von 0 bis 5 ziemlich unscharf gemessen sind.

Weit klarer ist die Situation in den Beispielen 3) und 4), solche Merkmale nennt man ***quantitativ***. Die Semesterzahl in Beispiel 3) ist eine natürliche Zahl, dieses quantitative Merkmal nennt man ***diskret***. In Beispiel 4) dagegen kann man theoretisch beliebig genau messen, solche Messungen werden als ***kontinuierliche*** Merkmale bezeichnet. Da Messungen in der Praxis jedoch nur mit begrenzter Genauigkeit möglich sind, ist der Übergang von diskreten zu kontinuierlichen quantitativen Merkmalen fließend.

Insgesamt kann man also annehmen, dass die Menge A der möglichen Ausprägungen - nach eventueller Codierung - eine Teilmenge der reellen Zahlen ist, also $A \subset \mathbb{R}$.

Zur Vereinfachung der Bezeichnungen kann man die Individuen nummerieren, dann ist

$$M = \{1,...,n\},$$

und die Werte eines Merkmals bezeichnet man mit $x_j := X(j)$. Ist $A \subset \mathbb{R}$, so nennt man die Zahlen $x_1,...,x_n \in \mathbb{R}$ eine ***Messreihe***.

Ist M endlich, so ist auch die Menge $X(M) \subset A$ der aufgetretenen verschiedenen Ausprägungen endlich, also

$$X(M) = \{a_1,...,a_m\} \quad \text{mit} \quad m \leqslant n.$$

Ziel der folgenden Abschnitte ist es nun, das Ergebnis einer solchen Umfrage übersichtlich und zusammenfassend darzustellen.