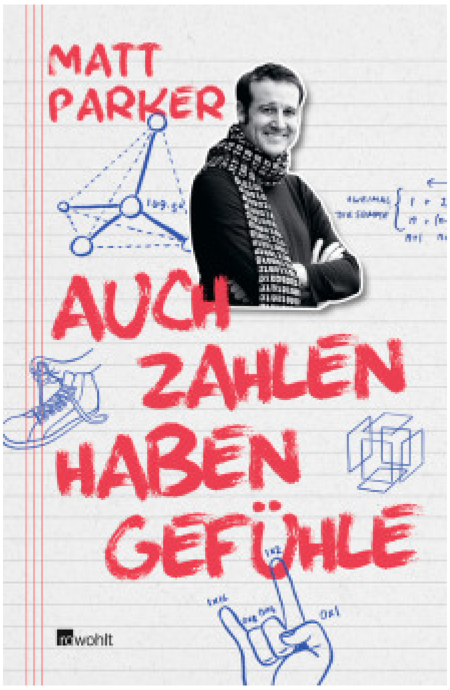
Leseprobe aus:

Matt Parker

Auch Zahlen haben Gefühle



Mehr Informationen zum Buch finden Sie auf rowohlt.de.

MATT PARKER

Auch ZAHLEN haben GEFÜHLE

Warum sie romantisch, sozial oder selbstverliebt sein können und was sich sonst noch mit Mathematik anstellen lässt

Aus dem Englischen von Monika Niehaus und Bernd Schuh

ROWOHLT

Die englische Originalausgabe erschien 2014
unter dem Titel «Things to Make and Do
in the Fourth Dimension» bei Particular Books,
an imprint of Penguin Books, London.

1. Auflage Oktober 2015

Illustrationen Richard Green
Lektorat Frank Strickstrock
Umschlaggestaltung Anzinger | Wüschner | Rasp, München
Umschlagillustrationen Richard Green
Foto des Autors Teri Pengilley
Satz Minion Pro, InDesign,
Gesamtherstellung CPI books GmbH
Leck, Germany
ISBN 978 3 498 05241 6

$$9 + (7 \times 3) + 8 + (3 \times 3) + 4 + (9 \times 3) + 8 + (0 \times 3) + 5 + (2 \times 3) + 4 + (1 \times 3) + 6 = 110 \equiv 0 \pmod{10}$$

Gewidmet Keith und Nona Parker,
meinen Großeltern mütterlicherseits, die mich
zum Tun und Lehren anregten.

INHALT

Das NULLTE Kapitel

Schauen Sie sich um und beschaffen Sie sich ein Trinkgefäß, egal, ob es ein Bierglas oder ein Kaffeebecher ist. Obwohl es anders wirkt: Der Umfang des Glases ist höchstwahrscheinlich größer als seine Höhe. Ein Bierglas sieht vielleicht so aus, als sei es deutlich höher als «dick», doch ein Standard-Bierglas hat tatsächlich einen Umfang, der seine Höhe deutlich übertrifft. Das gilt auch für den Umfang eines Kaffeebechers der in unseren Großstädten allgegenwärtigen Starbucks-Cafés. Deshalb schlug ich ihnen vor, ihren Becher den «kurzen Dicken» zu nennen, doch sie wollten nicht.

Nutzen Sie die Sache zu Ihrem Vorteil aus, es ist ganz einfach: Wenn Sie das nächste Mal in einer Kneipe, in einem Café – oder wo auch immer die Art Getränk serviert wird, die Sie schätzen – kostenlos etwas trinken wollen, wetten Sie einfach mit jemandem, dass sein Trinkgefäß einen größeren Umfang hat, als es hoch ist. Wenn es sich in der Kneipe um einen Glaskrug (mit Henkel) oder in einem Café um einen unverschämt großen Becher handelt, haben Sie schon gewonnen: Der Umfang dieser Gefäße beträgt in der Regel mehr als das Doppelte ihrer Höhe. Also können Sie sogar ganz lässig zwei aufeinander stellen und behaupten, der Umfang sei immer noch größer als die Höhe. Wenn Sie dann allerdings ein Maßband aus der Tasche ziehen, könnten Ihre Opfer womöglich an der Spontanität Ihrer kleinen Vorführung zweifeln; benutzen Sie also lieber einen herumliegenden Trinkhalm oder dessen Papierhülle als behelfsmäßiges Lineal.

Der «Trick» funktioniert bei sämtlichen Gläsern außer den allerschlanksten. Wenn Sie Ihr Glas zunächst prüfen möchten, ohne Verdacht zu erregen, versuchen Sie, es mit einer Hand zu umfassen. Ihre Finger und Ihr Daumen werden sich auf der anderen Seite nicht treffen. Nun versuchen Sie mit Daumen und Zeigefinger die Höhe des Glases zu überspannen – wahrscheinlich wird's klappen (oder zumindest fast). Das zeigt überzeugend, um wie viel höher Gläser sind als ihr Umfang.

Dies ist genau die Art Mathematik, von der ich mir wünsche, dass mehr Leute darüber Bescheid wüssten: die überraschende, die unerwartete Mathematik, und – am wichtigsten – die Art Mathematik, mit der man ein Freibier bekommen kann. Mein Ziel in diesem Buch ist es, Ihnen all die unterhaltsamen Seiten der Mathematik zu zeigen. Es ist eine Schande, dass die meisten Leute meinen, Mathematik sei das, was ihnen in der Sekundarstufe eingetrichtert wurde: Sie ist tatsächlich sooooo viel mehr!

Manchmal kann Mathematik tatsächlich gähnend langweilig sein. Wenn man in irgendeiner Schule zufällig in eine Mathestunde gerät, wird man höchstwahrscheinlich den Eindruck gewinnen, dass ein Großteil der Schüler *nicht* voller Begeisterung bei der Sache ist, um es freundlich auszudrücken. Ich fürchte, dass die Pennäler in einer solchen Klasse zu den uninspirierten Mathematikschülern gehören, von denen eine Generation auf die andere folgt. Es wird jedoch ein paar Ausnahmen geben. Einige dieser Schüler werden es lieben und den Rest ihres Lebens von Mathematik begeistert sein. Woran haben sie diesen Spaß, der den anderen entgeht?

Ich war einer dieser Schüler: Ich konnte durch all die langweiligen Übungen hindurch das Herz der Mathematik erkennen, die Logik, die hinter allem steht. Doch ich konnte auch den Frust meiner Mitschüler nachempfinden, vor allem der Sportskanonen. In der Schule fürchtete ich das Fußballtraining so wie viele andere die Mathestunden. Ich konnte jedoch verstehen, was all dieses Dribbeln mit einem Fußball um orange-weiß geringelte Hütchen sollte: Man baut ein Grundrepertoire an Fähigkeiten auf, um loslegen zu können, wenn man ein echtes

Spiel austrägt. Und deshalb verstand ich auch, warum meine sportlichen Klassenkameraden Mathe hassten: Es ist widersinnig, Schüler die Grundfähigkeiten üben zu lassen, die für Mathematik nötig sind, sie dann aber nicht auf die mathematische Spielwiese zu lassen, damit sie ihren Spaß haben können.

Das ist es, was die Mathebegeisterten wussten. Darum kann man auf Mathematik eine Karriere aufbauen. Wenn Leute in der mathematischen Forschung arbeiten, dann zählen sie nicht nur immer größere Summen zusammen oder führen immer längere Divisionen durch, wie manche glauben. Das wäre so, als ob ein Profi-Fußballer nur immer schneller um die Hütchen dribbelte. Profi-Mathematiker nutzen die erlernten Fähigkeiten und die Techniken, die sie sich erarbeitet haben, um das Spielfeld der Mathematik zu erforschen und Neues zu entdecken. Vielleicht jagen sie nach Formen in höheren Dimensionen, versuchen neue Zahlentypen zu finden oder erforschen eine Welt jenseits des Unendlichen. Sie rechnen jedenfalls nicht einfach nur herum.

Darin liegt das Geheimnis der Mathematik: Es ist ein einziges großes Spiel. Professionelle Mathematiker lieben es zu spielen. Und darum geht es auch in diesem Buch: Ihnen diese Welt aufzutun und Ihnen die Freiheit zu geben, mit Mathematik zu spielen. Auch Sie können sich wie ein erstklassiger Mathematiker fühlen, und falls Sie schon eines dieser Kinder waren, die Mathe lieben, gibt es noch immer eine Unmenge an Neuem zu entdecken. Alles in diesem Buch beginnt mit Dingen, die man tatsächlich herstellen und machen kann. Man kann ein vierdimensionales Objekt bauen, sich originelle Zerlegungen ausdenken und unglaubliche Knoten knüpfen. Ein Buch ist zudem ein erstaunliches Stück Technik mit einem hochmodernen Pausenmodus. Wenn Sie innehalten und eine Weile mit einem mathematischen Puzzle herumspielen möchten, so können Sie das tun. Das Buch rührt sich nicht vom Fleck, alle Wörter bleiben an Ort und Stelle und warten auf Ihre Rückkehr.

Alle besonders aufregenden, wegweisenden technischen Entwicklungen basieren letztlich auf Mathematik, von der Datenverarbeitung, die hinter der modernen Medizin steckt, bis zu den Gleichungen, die die Textbotschaften zwischen Handys übermitteln. Und selbst ganz maßgeschneiderte mathematische Technologie basiert letztlich darauf, dass irgendein Mathematiker den spielerischen Versuch machte, ein Rätsel zu lösen.

Das ist das Wesen der Mathematik. Es ist das Streben nach Mustern und Logik um ihrer selbst willen; es geht darum, unsere Neugier spielerisch zu befriedigen. Neue mathematische Entdeckungen können zahllose praktische Anwendungen haben – und unter Umständen verdanken wir ihnen unser Leben –, doch selten werden sie vornehmlich aus diesem Grund entdeckt. Wie schon der Physiker und Nobelpreisträger Richard Feynman über sein eigenes Fachgebiet gesagt haben soll: «Physik ist in vieler Hinsicht wie Sex; natürlich kann er zu praktischen Ergebnissen führen, das ist aber nicht der Grund, warum wir's tun.»

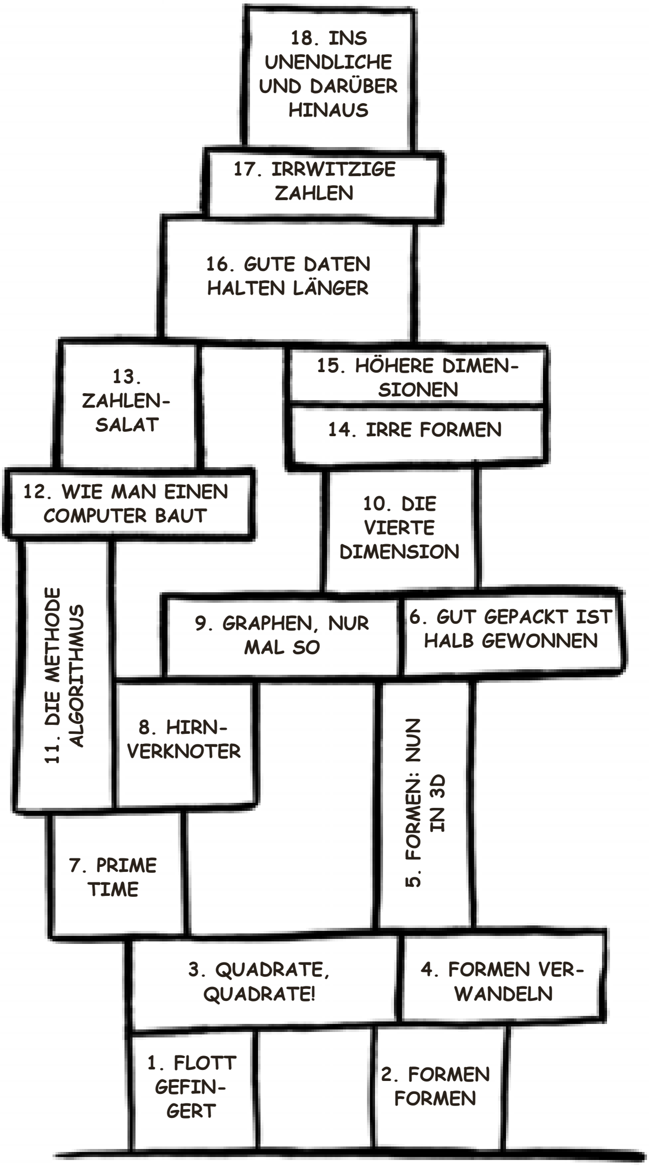
Ich hoffe, es gelingt mir, die Mathematik, die Sie in der Schule gelernt haben, ins rechte Licht zu rücken. Ohne diese Schulmathematik blieben all die anderen interessanten Mathe-Felder unerreichbar. Jeder Schüler erinnert sich zumindest vage an die mathematische Konstante π (Pi, rund 3,14), und einige entsinnen sich vielleicht sogar, dass π das Verhältnis vom Umfang eines Kreises und dessen Durchmesser definiert. Dieses π sagt uns also, dass der Umfang eines Glases mehr als dreimal so groß ist wie der Durchmesser. Und es ist der Durchmesser, den die meisten Leute im Blick haben, wenn sie abschätzen, wie hoch ein Glas ist – wobei sie vergessen, ihn mit π zu multiplizieren. Dabei geht es um mehr, als sich an eine Verhältniszahl zu erinnern, hier muss sie sich in der Wirklichkeit bewähren.

Leider dreht sich die Mathematik in der Schule nur selten darum, wie man in einer Kneipe an ein Freibier kommt. Der Grund, warum man die Schulmathematik nicht völlig links liegen lassen kann, ist der, dass die aufregenderen mathematischen Phänomene auf den weniger aufregenden aufbauen. Zugleich ist dies zumindest zum Teil der Grund, warum manche Leute Mathe so schwierig finden: Sie haben ein paar entscheidende Grundlagen nicht mitbekommen, und ohne sie erscheinen die höheren Sprossen der Leiter unerreichbar. Hätten sie die Thematik jedoch Schritt für Schritt in der richtigen Reihenfolge bewältigt, wäre alles gut gewesen.

Kein einziger Teilaspekt der Mathematik ist schwierig zu meistern, aber manchmal ist es wichtig, die Dinge in einer optimalen Reihenfolge zu erledigen. Sicherlich bedarf es beträchtlicher Anstrengung, um die obersten Sprossen einer sehr hohen Leiter zu erreichen, aber jede einzelne Sprosse ist nicht mühsamer zu erklimmen als die vorherige. Das gilt auch für die Mathematik. Schritt für Schritt bewältigt, macht die ganze Sache viel Spaß. Wenn man Primzahlen versteht, ist der Umgang mit Primknoten viel einfacher. Wenn man zunächst mit 3D-Formen umzugehen lernt, sind 4D-Formen nicht mehr so einschüchternd. Man kann sich all die Kapitel dieses Buches als ein Gerüst vorstellen, bei dem ein Bauteil auf mehreren der vorangegangenen Kapitel ruht.

Sie können sich sogar Ihren eigenen Weg durch die Kapitel suchen, solange Sie vor Beginn des letzten Kapitels all die vorherigen gelesen haben, auf denen es beruht. Je weiter das Buch voranschreitet, desto fortgeschrittener ist die Mathematik, die die Kapitel behandeln – es geht dann um die Art von Dingen, von denen man im Klassenzimmer gewöhnlich nichts hört. Auch das kann auf den ersten Blick einschüchternd wirken. Aber solange Sie alles in der richtigen Reihenfolge lesen, verfügen Sie zu dem Zeitpunkt, an dem Sie die entlegenen Winkel der Mathematik erreichen, über das nötige Rüstzeug, um all die Freuden und Überraschungen zu genießen, die diese Wissenschaft bieten kann.

Vergessen Sie vor allem nicht, dass die Motivation, dieses Gerüst zu besteigen, allein darin bestehen sollte, die Aussicht während des Aufstiegs zu genießen. Allzu lang ist Mathematik mit trockenem Lernstoff gleichgesetzt worden; dabei sollte es darin um Spaß und Erkunden gehen. *Ein* Rätsel auf einmal, *ein* Mathe-Spiel nach dem anderen, und bald erreichen wir die Spitze der Leiter und freuen uns an all den faszinierenden Facetten der Mathematik, von denen andere nicht einmal wissen, dass sie existieren. Wir werden mit Dingen spielen können, die über die normale menschliche Intuition hinausgehen. Die Mathematik gewährt uns Zugang zur Welt der imaginären Zahlen, zu Formen, die nur in 196 884 Dimensionen existieren, und zu Objekten jenseits der Unendlichkeit. Von der vierten Dimension bis zu transzendenten Zahlen – wir werden nichts auslassen!



Dieses Buch ist ein Gerüst von Kapiteln, die aufeinander aufbauen.
Wählen Sie Ihren Weg mit Bedacht.

EINS

Flott GEFINGERT

Wenn ich zum Zahnarzt muss, lenke ich mich mental gern ein wenig ab, während ein Fremder versucht, in meinen Mund zu kriechen. Normalerweise mit irgendeinem Zahlenspiel, das ich im Kopf spielen kann. Als ich eines Tages wieder einmal auf dem Weg zum Zahnarzt war, fragte ich daher auf Twitter nach einem guten Matherätsel, das sich ohne Papier und Bleistift lösen ließ. Ein Freund forderte mich auf, alle neun Ziffern so anzuordnen, dass die ersten beiden ein Vielfaches von 2 bilden, die ersten drei ein Vielfaches von 3, und so weiter, bis zu allen neun Ziffern, die dann ein Vielfaches von 9 bilden sollen. Es gibt nur eine einzige Lösung.

Bevor ich es mir im Zahnarztstuhl allzu bequem gemacht hatte, hatte ich herausgefunden, dass die traditionelle langweilige Zahlenfolge 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 nicht funktioniert. Obgleich 12 durch 2 teilbar ist und 123 durch 3, geht's von da an nicht mehr weiter. 1234 lässt sich nicht glatt durch 4 teilen. Am Ende meiner Zahnbehandlung hatte ich noch lange nicht alle Ziffern ausgetüftelt, aber offenbar darf man nicht auf dem Zahnarztstuhl sitzen bleiben, wenn der Arzt mit einem fertig ist. Zu Hause stellte ich dann fest, dass die einzige Anordnung, die funktioniert, 381 654 729 ist.

(Wenn man nicht unbedingt alle neun Ziffern benutzen muss und null ebenfalls verwendet wird, gibt es eine Vielzahl weiterer Optionen, beispielsweise 480 006. Da so viele benachbarte Kombinationen ihrer Stellen teilbar sind, bezeichnet man diese Zahlen als polydivisible Zahlen. Es gibt 20 456 polydivisible Zahlen, von denen 3 608 528 850 368 400 786 036 725 die größte ist.)

Interessant ist, dass dieses Rätsel nur wegen der Ziffern funktioniert, die wir heute zufälligerweise verwenden. Einen Römer in der Antike hätte dieser Hirnverzwirner kaum vom Zahnarzt ablenken können. Die alten Römer benutzten nicht nur andere Symbole, wie V und X – diese Symbole hatten auch stets denselben Wert, unabhängig von ihrer Stellung in einer Zahl. V steht immer für 5, X immer für 10. Das ist bei unseren Ziffern anders: die 2 in 12 steht für 2, die 2 in 123 hingegen für 20. Zum Glück waren Zahnbehandlungen zu Zeiten der römischen Antike zwar grob, aber es ging schnell.

Hinter Zahlenrätseln – und auch einer Menge Schulmathematik – verbirgt sich ein schmutziges Geheimnis: Ein großer Teil davon funktioniert nur wegen der Art und Weise, wie wir Zahlen niederschreiben. Wenn wir in unserem gegenwärtigen Zahlensystem 111 111 111 mit sich selbst multiplizieren, erhalten wir als hübsches Ergebnis 12 345 678 987 654 321 (alle Ziffern von 1 bis 9 und dann wieder zurück). Das funktioniert auch bei kürzeren Zahlenfolgen von 1: 11 111 × 11 111 = 123 454 321 und 111 × 111 = 12 321. Versucht man jedoch, Zahlen anders niederzuschreiben, löst sich das Muster in Luft auf. 111, in römischen Zahlen ausgedrückt, ist gleich CXI, und CXI × CXI ergibt XMMCCCXXI, was *überhaupt nicht* hübsch aussieht.

Ich möchte damit sagen, dass es einen Unterschied gibt zwischen dem Begriff «Zahl» und dem Begriff «Ziffer». Nehmen Sie beispielsweise die Zahl drei: 3, und vergleichen Sie sie mit der Ziffer drei: 3. Beide sehen identisch aus (vor allem, weil sie identisch *sind*), doch es gibt da einen feinen Unterschied. Eine Zahl ist genau das, wofür Sie sie halten: sie repräsentiert eine Anzahl von Dingen: 3 ist eine Zahl, 3435 ist ebenfalls eine Zahl. Zahlen sind abstrakte Konzepte, und um sie niederzuschreiben, benutzen wir Ziffern. Daher ist eine Ziffer nichts anderes als ein Symbol, um eine Zahl schriftlich zu übermitteln, in derselben Weise, wie wir Buchstaben benutzen, um Wörter zu schreiben. Die Zahl 3435 verwendet die Ziffern 3, 4 und 5. Alle Mathematik, die Sie lernen und auf die Sie ringsumher stoßen, lässt sich in zwei Kategorien einteilen: echte Mathematik, die auf intrinsischen Eigenschaften beruht, und Ergebnisse, die nur ein Nebenprodukt der Art und Weise sind, wie wir sie aufs Papier bringen.

Jetzt wird's trickreich

Ein prima Startpunkt (und ein prima Aufhänger, damit die ganze Sache weniger an eine Schulstunde erinnert) ist der 37er-Trick.

Nehmen Sie irgendeine Ziffer und schreiben Sie sie drei Mal nieder. Nun steht auf Ihrem Blatt etwas wie 333 oder 888. Addieren Sie die drei Ziffern: $3 + 3 + 3 = 9$ oder $8 + 8 + 8 = 24$. Das ist noch nicht besonders aufregend. Bisher zählen wir nur Zahlen zusammen. Nun wollen wir unsere ursprüngliche Zahl (333 oder 888) durch die Summe ihrer Ziffern (9 oder 24) dividieren. Das kann man entweder mit einem Taschenrechner oder im Kopf machen. (Der Taschenrechner ist schneller.) Ganz gleich, welche Methode Sie benutzen, und ganz gleich, mit welcher Ziffer Sie gestartet sind, die Antwort ist stets 37. Darum spricht man oft vom 37er-Trick.

Wie gesagt, das funktioniert für jede Ziffer, für die Sie sich am Anfang entscheiden. Diese freie Wahl löst sich jedoch rasch in Luft auf. Es steht absolut fest, dass am Ende der Berechnung 37 herauskommen wird. Hinter den Kulissen läuft ein raffiniertes Kabinettstückchen Algebra ab. Dieselben drei Ziffern zu schreiben, ist dasselbe, wie eine Ziffer mit 111 zu multiplizieren. Wenn Sie sich für 8 entschieden haben, dann ist 888 das Ergebnis von 8×111. Und diese drei Ziffern zu addieren, ist gleichbedeutend mit einer Multiplikation mit der Zahl 3: $8 + 8 + 8 = 3 \times 8 = 24$. Daher ist 888 durch 24 zu teilen dasselbe wie

111 durch 3 zu teilen, denn die Achten kürzen sich weg. Und dasselbe gilt für alle übrigen Ziffern …

… aber doch nicht so ganz. Hätte ein alter Römer die Ziffer V gewählt, würde der 37er-Trick nicht zur Antwort 37 führen und daher gar nicht erst als 37er-Trick oder überhaupt als Trick bekannt sein. Zum Glück – zumindest, was diesen Fall angeht – ist unser gegenwärtiges System mit zehn Ziffern inzwischen fast ausschließlich und überall in Gebrauch, doch falls Sie versucht hätten, einen Babylonier zu verblüffen, wäre dieser Trick ein Reinfall gewesen, denn die schrieben Zahlen ganz anders nieder, als wir es heute tun. Sollten wir jemals von Außerirdischen besucht werden, die Zahlen vielleicht auf verschiedene seltsame Arten und Weisen notieren, würde die Sache bei ihnen höchstwahrscheinlich auch nicht funktionieren. Dieser Trick ist eine Kombination aus dem, was wir als «grundlegende» Eigenschaften von Zahlen betrachten (Eigenschaften, die sich nicht verändern, wenn sie auf unterschiedliche Weise schriftlich festgehalten werden), und einer Laune unseres gegenwärtigen Systems zur Darstellung von Zahlen.

Warum ist das so? Nun, 111 ist durch 3 teilbar, ganz gleich, wie man die Zahlen aufschreibt. CXI ist durch III teilbar, 百十一 ist durch 三 teilbar, und Außerirdische überall im Universum werden wissen, dass hundertelf durch drei teilbar ist. Das Ergebnis lautet immer 37 (oder XXXVII oder 参拾七 oder irgendein außerirdisches Kauderwelsch für «siebenunddreißig»). Wenn Sie einen Stapel von einhundertelf Steinen haben, können Sie ihn stets in drei Stapel von siebenunddreißig Steinen aufteilen. Und weil diese Eigenschaft losgelöst von jeder Darstellungsform der Zahlen ist, betrachten Mathematiker sie als eine der wichtigeren abstrakten Eigenschaften.

Auf der anderen Seite steht der Umstand, dass das dreimalige Niederschreiben derselben Ziffer einer Multiplikation mit 111 entspricht; es ist nicht mehr als ein unbeabsichtigter Nebeneffekt unserer Methode, Zahlen zu notieren. Im römischen Zahlensystem entspricht das dreimalige Schreiben derselben Ziffer einer Multiplikation mit 3, nicht mit 111. (VVV = III × V.)

Ein Teil der Stärke der Mathematik besteht darin, dass sie universelle Wahrheiten ausdrückt, diese aber auf unterschiedliche Weise formulieren kann. Die alten Mayas und Römer lernten dieselbe Mathematik, doch sie gebrauchten bei der Niederschrift ganz andere als unser modernes System.

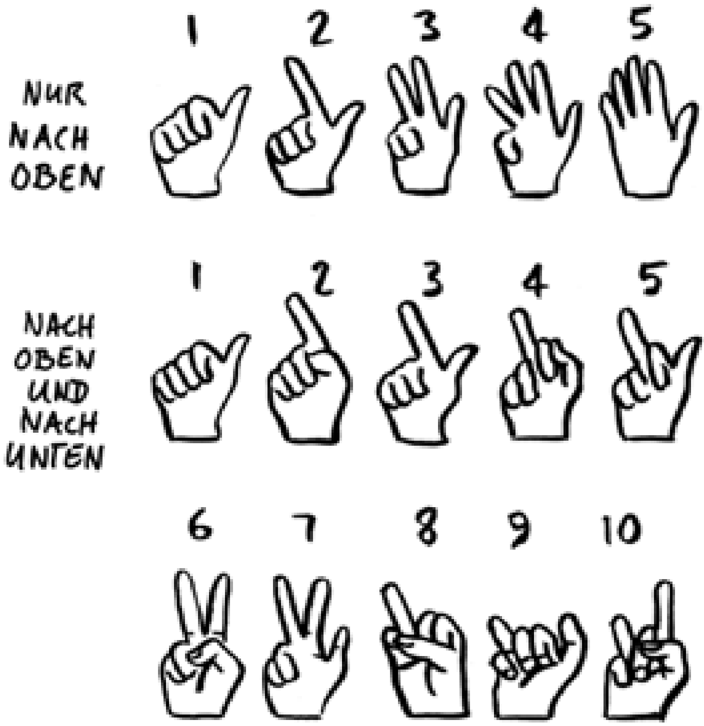
Um die Welt der Mathematik zu erforschen, müssen wir wissen, welche Sprache jedermann spricht. Wir wollen mit dem Zahlensystem beginnen, das wir heute verwenden, das aber nicht unbedingt das beste sein muss.

Was ist eine Zahl?

Was ist die größte Zahl, bis zu der Sie mit Ihren Fingern zählen können? Nun, die meisten Leute hören bei «zehn» auf, hauptsächlich mangels weiterer Finger. Aber nicht jedermann benutzt das ziemlich begrenzte System, seine Finger zum Zählen lediglich zu strecken und sie nicht wieder zu beugen. Wenn man Beugen einbezieht, kann man mit den ersten beiden Fingern bis drei zählen. Strecken Sie Ihren Daumen aus für 1, den Zeigefinger für 2 und beide für 3. Nun ist der Mittelfinger frei; allein ausgestreckt steht er für 4, dann erster und dritter Finger für 5 und so weiter. Auf diese Weise kann man bis 15 zählen, bevor man auch nur den fünften Finger, den kleinen der ersten Hand, einsetzen muss.

Mit diesem System kann man allein mit Hilfe aller Finger von 0 bis 1023 zählen. Aber unser persönlicher Fingerrechner kann noch mehr. Wenn man jeden Finger in der Nach-unten-, Halb-hoch- und Ganz-gestreckt-Position verwendet, kann man von 0 bis 59 048 zählen. Gehen wir einen Schritt weiter und benutzen vier Positionen (gebogen, die Handfläche berührend/gebogen, die Handfläche nicht berührend/Mittelposition und voll gestreckt), so bringt uns das einen Spielraum von 0 bis 1 048 575 – mehr als eine Million, die sich an den Fingern abzählen lässt.

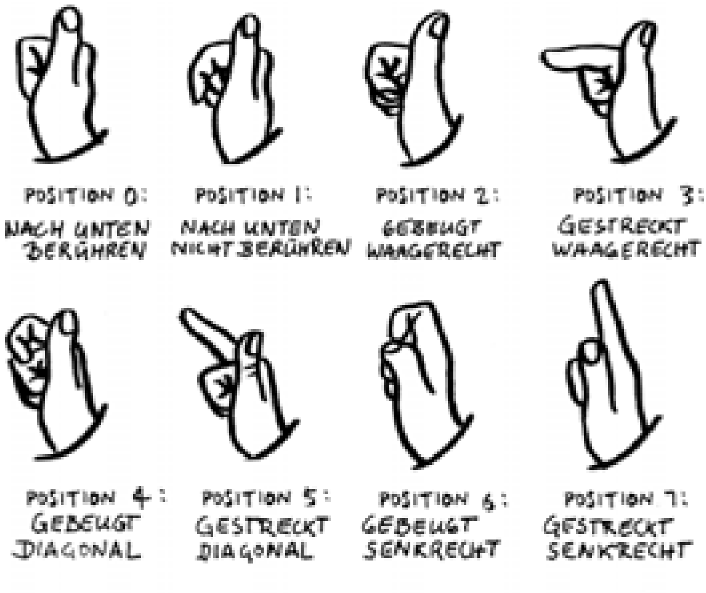
Das ist eine Leistungsverbesserung um einen Faktor von mehr als 10 000, während das Arthritisrisiko für die Finger nur unwesentlich ansteigt.



Und warum an dieser Stelle aufhören?

Acht Positionen für jeden Finger zu benutzen, heißt nicht nur, ein bisher unbekanntes Maß an Fingerfertigkeit zu erreichen, sondern auch, von 0 bis 1 073 741 823 zählen zu können: mehr als eine Milliarde!

Ein Nachteil könnte natürlich sein, dass Sie mit dieser ganzen Fingersprache unfreiwillig als Mitglied einer Straßengang enden.

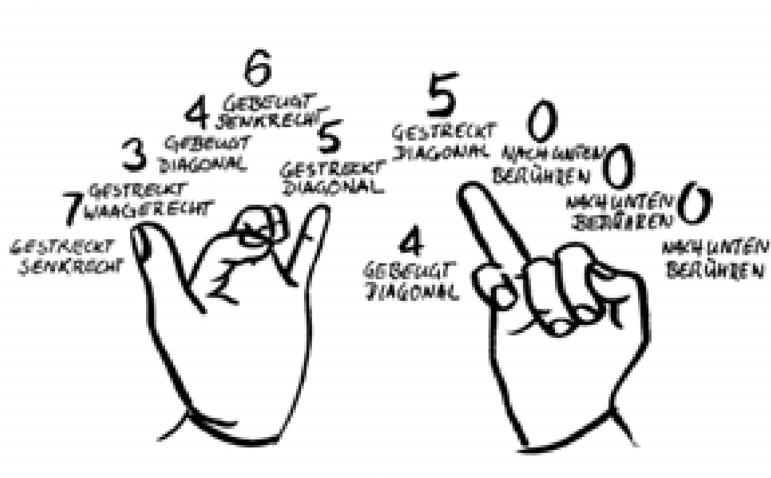


Das war die letzte Fingerkombination, die ich ausgearbeitet habe, aber wie viel höher könnte man gehen? Für Schnelldenker mit besonders beweglichen Fingern und einem ebenso flexiblen Verstand gibt es wohl keine Grenzen.

Der Unterschied, mit den Fingern nur bis zehn zu zählen oder plötzlich bei einer Milliarde zu landen, besteht darin, dass wir jeden einzelnen Finger jetzt nicht mehr als dröges Abzählelement ansehen, sondern seine *Position* berücksichtigen. Wenn wir mit unseren ersten beiden Fingern bis drei zählen, statt «normal» zu zählen (wobei alle Finger gleich sind, d. h. jeder 1 oder 1 mehr repräsentiert), bedeutet der erste Finger, wenn er ausgestreckt ist, noch immer 1, doch der zweite Finger bedeutet 2, wenn er alleine ausgestreckt ist. Wenn wir fortfahren und dabei den «nach oben und nach unten»-Anweisungen des Diagramms auf Seite 22 folgen, bedeutet der dritte Finger 4, der vierte 8 und der fünfte 16, und wir erahnen das System: Jeder Finger ist in aufrechter Haltung doppelt so viel wert wie der vorangegangene aufrechte Finger. Mit ein wenig Herumprobieren kann man jede nur mögliche Zahl mit seinen Fingern in diesen beiden Positionen darstellen. (Tipp: 132 ist die fingertechnisch am schwierigsten zu realisierende Position. Versuchen Sie's – oder vielleicht lieber doch nicht.) Da es für jeden Finger zwei Optionen gibt, spricht man von einem binären Zahlensystem. Beim Niederschreiben kann man 0 für Finger benutzen, die gebeugt sind, und 1 für ausgestreckte Finger. Vielleicht erinnern Sie sich noch aus der Schule daran, dass die erste Position im binären System 1 darstellt, die zweite 2, die dritte 4, die vierte 8, und so weiter.

Das nächste Fingerzählsystem basiert darauf, dass es drei verschiedene Positionen für jeden Finger gibt: nach unten, halb nach oben (oder halb nach unten, wenn Sie Pessimist sind) und nach oben; daher spricht man von einem System auf der Basis 3.

Und dieses Spiel kann man weiterspielen: vier Fingerhaltungen führen zu einem System auf der Basis 4, acht zu einem System auf der Basis 8. Um es kurz zusammenzufassen (und um sicherzustellen, dass wir alle achtgeben): Der Wert einer jeden Position, ob Finger oder niedergeschrieben, ist gleich der vorherigen Position, multipliziert mit der Basis, beim System auf der Basis 3 also 1, 3, 9, 27 … und wir können die drei Ziffern 0, 1 und 2 benutzen, um sukzessive Stufen der Fingerhaltung zu kennzeichnen, und im, sagen wir, Achtersystem lautet die Folge 1, 8, 64, 512 … und die acht Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 7 werden durch die unterschiedlichen Fingerpositionen repräsentiert. Im Achtersystem lässt sich eine Milliarde also als 7 346 545 000 schreiben.



Die 1-Milliarde-Anordnung der acht Fingerhaltungen (gilt gleichzeitig als Mathegeheimbund-Handzeichen)

Diese Zahlentypen bilden eine ganze Familie von Stellenwertsystemen, die sich völlig vom römischen Zahlensystem unterscheiden, bei dem die Position eines Symbols überhaupt keinen Unterschied für das macht, was es darstellt. Das Symbol V repräsentiert 5, wo auch immer in einer Zahl es auftaucht, während die Ziffer 3 in der Zahl 3435 in Abhängigkeit von seiner Position sowohl für 3000 als auch für 30 steht. Römische Zahlensymbole sind ein übertechnisiertes Abzählsystem, das über seine ursprüngliche Kapazität hinaus gebraucht wird. Stellenwertsysteme sind viel mächtiger, denn sie können problemlos eine Zahl beliebiger Größe darstellen. Natürlich benutzen wir in der modernen Welt fast ausschließlich das auf der Basis 10 beruhende Zahlensystem, doch um es nochmals zu sagen: Es ist nur eine von vielen Möglichkeiten.

Wenn man unterschiedliche Basen benutzt, bleibt viel Raum für Verwirrung und Missverständnisse. Ich kann Zahlen in ein System übersetzen, das völlig andere Symbole benutzt, beispielsweise eine Zahl aus dem Zehnersystem ins römische System übertragen (dabei wird aus 3435 MMMCDXXXV), und man erkennt leicht, in welchem

System letztere Zahl geschrieben ist. Die ganze Sache ähnelt der Übersetzung in eine Sprache, die ein völlig anderes Alphabet benutzt, zum Beispiel aus dem Englischen ins Japanische. Wenn man jedoch ein Wort aus dem Deutschen ins Englische übersetzt, benutzt man dasselbe Alphabet, und wenn man nicht weiß, in welcher Sprache man sich gerade befindet, kann es böse Missverständnisse geben (wenn Ihnen ein Engländer «a gift» anbietet, will er Sie nicht etwa umbringen, sondern Ihnen ein Geschenk machen).

Ich kann einfach nicht anders, als den Mathewitz mit dem ellenlangen Bart zu erzählen, der auf einem solchen Missverständnis fußt; normalerweise sieht man ihn auf T-Shirts als saukomischen Aufdruck: «Es gibt genau 10 Typen von Leuten, diejenigen, die den Binärcode verstehen, und diejenigen, die es nicht tun». Was die Komik betrifft: «10» bedeutet 2 im Binärsystem, daher kapieren nur diejenigen, die binär verstehen, dass 2 und nicht 10 gemeint ist. Ich warte kurz, bis Sie sich wieder eingekriegt haben.

Ich behandele diesen Witz nur deshalb ein wenig bissig, weil er mir als Mathematiker, der auch als Stand-up-Comedian arbeitet, *ständig* erzählt wird. Normalerweise beginnen die Leute mit: «Kennen Sie den? Tja, eigentlich funktioniert er nicht, wenn man ihn *erzählt*, aber …», und dann versuchen sie, einen Witz verbal wiederzugeben, der nur niedergeschrieben funktioniert. Das ist das Problem mit binären Witzen: Entweder funktionieren sie, oder sie tun's nicht. Doch wie sein komödiantischer Wert auch immer einzuschätzen ist – dieser Witz ist ein fantastisches Beispiel dafür, wie sich verschiedene Zahlen mit denselben Ziffern in derselben Reihenfolge niederschreiben lassen, je nachdem, welches System man benutzt.

Wie dem auch sei, wir haben uns völlig auf das Zehnersystem versteift. Die Leute meinen, das liege an unseren zehn Fingern: Wenn man seine Finger als Zählhilfe benutzt, dann muss man das System jedes Mal, wenn man zehn erreicht, «neu starten» und gleichzeitig im Auge behalten, wie viele Zehnerrunden man absolviert hat. Wenn ein Freund dies für Sie übernimmt, gehen ihm nach zehn Runden ebenfalls die Finger aus, deshalb braucht man anschließend jemanden, der mitzählt, wie viele Hunderter sich angesammelt haben. Zahlen als Vielfache von Zehnern nachzuverfolgen, sei daher naheliegend für uns Menschen, heißt es (oder zumindest für Menschen, die genügend Freunde haben). Offenbar bezogen die Mayas also beim Zählen auch ihre Zehen ein, denn ihr Zahlensystem basierte auf der 20.

Intelligente Wesen, die sich anderswo im Universum entwickeln, besitzen vielleicht keine zehn Finger – sie könnten ebenso gut drei Arme mit jeweils vier fingerartigen Fortsätzen zum Greifen haben und Zahlen durchaus im Zwölfersystem notieren. Selbst hier auf der Erde gibt es ein paar Leute, die hartnäckig darauf bestehen, wir sollten vom Zehnersystem zum Zwölfersystem wechseln. «Duodezimalisten» betonen die Vorzüge eines Zwölfersystems zum Zählen (beispielsweise ist zwölf durch mehr Zahlen teilbar als zehn und daher das Schreiben von Brüchen einfacher), übersehen aber zugleich den riesigen Aufwand, den ein solcher Wechsel verursachen würde. Wenn wir zum Zwölfersystem wechselten, bräuchten wir zwölf Ziffern, daher müssten wir zum Beispiel «A» für 10 und «B» für 11 hinzufügen, sodass aus 3 435 im Zehnersystem 1 BA3 im Zwölfersystem würde.

Daher ist ein solcher Wechsel höchst unwahrscheinlich. Andere auf bestimmten Zahlen basierende Systeme bleiben die Spielwiese für Mathematiker, während alle übrigen Menschen fast ausschließlich das Zehnersystem benutzen. Nur wenn es um Computer geht, gelingt es einem Zahlensystem aus dem Reich der mathematischen Neugier in die wirkliche Welt überzuwechseln. Das Binärsystem (auf der Basis 2) ist für Computer wegen seiner begrenzten Anzahl Ziffern gut geeignet; minimalistischer als ein System, das nur aus 0 und 1 besteht, geht's kaum.

Die Entwicklung moderner Computer hat dazu geführt, dass sie sich ausschließlich mit Situationen beschäftigen, in denen es nur zwei Möglichkeiten gibt. Entweder fließt Strom durch einen Draht in einem Schaltkreis oder nicht. Ein Magnet auf einer Festplatte hat entweder einen magnetischen Nordpol, der in *eine* Richtung weist, oder einen

Südpol, der in die entgegengesetzte Richtung zeigt. Alles ist daher 0 oder 1. Zum Glück lassen sich sämtliche Zahlen als eine Folge von Einsen und Nullen ins binäre System konvertieren.

Man muss jedoch einen Ziffernsatz finden, der so klein ist, dass das Zahlensystem brauchbar ist, aber dennoch groß genug, um Zahlen damit effizient niederschreiben zu können. Für intelligente Lebewesen, ob Menschen oder Aliens, funktionieren zehn bis zwölf Ziffern prima. Computer hingegen brauchen den begrenzten binären Ziffersatz, um zu arbeiten: Sämtliche Smartphones, Digitalfernseher und selbst Mikrowellenherde zählen und rechnen insgeheim mit binären Zahlen. Wenn sie mit Menschen interagieren, verwandeln sie diese Zahlen jedoch freundlicherweise für uns zurück ins Zehnersystem.

Die allerersten, sehr primitiven Computer waren nicht so rücksichtsvoll. Ich hatte einmal die Ehre, einen älteren Herrn zu treffen, der in seiner Jugend der letzte Mathematikstudent war, der von Alan Turing vor dessen frühem Tod 1945 unterrichtet wurde. Turing gilt zu Recht als «Vater des Computerwesens», und er entwickelte während seiner Zeit an der University of Manchester eines der ersten Betriebssysteme für einen der ersten Computer. Offensichtlich setzte Turings erstes Betriebssystem voraus, dass jeder, der den Computer benutzte, fließend Binär beherrschte, was für Turing selbst allemal galt. Als eine neue Version des Betriebssystems eingeführt wurde, welche binäre Zahleneingaben ins Zehnersystem übersetzte, bestand Turing bis zuletzt darauf, dass der Computer wieder auf Binärcode umgestellt wurde, wenn er daran arbeitete.

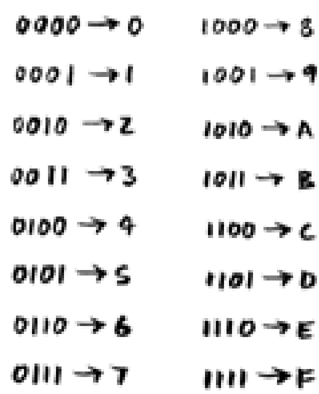
Obgleich die Binärzahlen, die in Computern verwendet werden, inzwischen tief unter den Benutzeroberflächen vergraben liegen, kann man noch immer Hinweise auf sie finden. Das reicht von den 16- und 32-GB-Speicherkarten bis zur 1024-Pixel-Auflösung des Computerbildschirms.

Ebenso, wie wir runde Zahlen schätzen – 1000 und 1 000 000 wirken so ansprechend –, tun dies Computer, nur, dass sie runde binäre Zahlen mögen. Da alle Stellenwerte im Binärcode Exponenten von

2 sind, tauchen sie im Umfeld von Computern überall auf: $2^5 = 32$ und $2^{10} = 1024$.

Manchmal rutscht Computern zufällig eine Zahl zur Basis 16 heraus, zum Beispiel bei Wi-Fi-Passwörtern, doch den meisten Leuten fällt das nicht auf. «Hexadezimal» – hochgestochen für «Basis 16» – benutzt die Symbole 0 bis 9 und dann die Buchstaben A bis F. Diese Zahlen fallen im Vergleich zu Zweierpotenzen weniger ins Auge, doch es gibt sie. Wenn Sie sich die Rückseite eines Wi-Fi-Routers ansehen, so ist das ursprüngliche Passwort in der Regel eine Reihe von Ziffern (0 bis 9) und Buchstaben (A bis F). Auch wenn Sie sich die Zahlencodes für Farben in Zeichen- oder Bildbearbeitungssoftware anschauen, stoßen Sie auf Hexadezimalwerte. Und nun, da Sie davon wissen, werden Sie natürlich bemerken, dass die Buchstaben A bis F gelegentlich in der Mitte einer Zahl auftauchen, die von Computern benutzt wird. Und wenn Sie so drauf sind wie ich, dann auch in Ihren Träumen …

Das Hexadezimalsystem wird benutzt, um Zahlen etwas effizienter als im Binärsystem zu speichern, doch nur Computerprogrammierer und andere sehr technikverliebte Nutzer von Computern bekommen sie zu Gesicht: 16 ist unter diesen Umständen die Basis der Wahl. Das mag bizarr erscheinen – warum nicht einfach das Zehnersystem nehmen? –, doch man griff auf die 16 zurück, weil sie selbst eine Potenz von 2 ist, und das macht es sehr einfach, zwischen beiden Systemen hin- und herzuwechseln. Wenn man von einer Basis zur anderen wechselt, unterscheiden sich die neuen Stellenwerte der Zahlen völlig von den alten. Ist die neue Basis jedoch eine Potenz der vorherigen, fallen einige alte Stellenwerte weg, aber es kommen keine



Von binär nach hexadezimal: Aus 1011110000100001 wird BC21.

neuen hinzu. Im Fall des Hexadezimalsystems wird jede Vierergruppe binärer Ziffern gegen dasselbe neue Einzelsymbol ausgetauscht.

Wenn man verschiedene Zahlensysteme erst einmal versteht, ist es leicht, die Mathematik zu entschlüsseln, auf der sie basieren. Tatsächlich ist es einfacher, fremde Zahlen als fremde Sprachen zu entziffern. Als im 19. Jahrhundert die Städte der Mayas wiederentdeckt wurden und riesige Mengen unverständlicher schriftlicher Zeugnisse zutage kamen, wurden die Zahlen viel früher übersetzt als die Schriften, obwohl sie auf dem seltsamen Zwanzigersystem basierten. Wenn wir in der Galaxie auf außerirdische Reisende träfen, könnten wir mit ihnen problemlos kommunizieren, sobald wir herausgefunden haben, welche Symbole sie für ihre Ziffern benutzen. Wenn wir ihnen aber ein Matherätsel vorlegen wollten, müssten wir eines wählen, das unabhängig davon funktioniert, wie die Zahlen aufgeschrieben werden.

Auf die Basis kommt es an

Können Sie die einzige Zahl zwischen zehn und zwanzig finden, die nicht die Summe aufeinander folgender Zahlen ist?

13 kann es nicht sein, denn 13 = 6 + 7, und 6 und 7 folgen aufeinander; 18 fällt ebenfalls aus, denn 18 = 5 + 6 + 7. Wenn Sie die Antwort bereits gefunden haben, suchen Sie eine weitere zwischen dreißig und vierzig. Und wenn Sie die nächste, jenseits der sechzig, ausgetüftelt haben, werden Sie beginnen, das Muster dieser Zahlen zu erkennen. Interessant bei diesem «Summe aufeinanderfolgender Zahlen»-Rätsel ist, dass es funktioniert, ganz gleich, in welcher Weise man die Zahlen niederschreibt. Ein alter Römer könnte das Rätsel mit seinem Zahlensystem lösen, ebenso ein Maya oder unser außerirdischer Freund.

Die erste Antwort, die Sie gefunden haben sollten, ist 16; es gibt keine Möglichkeit, konsekutive Zahlen so zu addieren, dass 16 herauskommt. Und 16 gehört zu einer Elite von anderen, ebensolchen Zahlen, wie 8 und 32 (warum diese Zahlen diese Eigenschaft haben, wird in den «Antworten am Ende des Buches» erklärt).

Wenn Sie sich für ein anderes Rätsel interessieren, und zwar für eines, das sich von einem Zahlensystem in ein anderes übertragen lässt, dann lassen Sie uns zu polydivisiblen Zahlen zurückkehren, die alle Ziffern ungleich null genau einmal benutzen, aber in einem Nicht-Zehnersystem. (Grämen Sie sich nicht, wenn Sie ein paar Seiten zurückblättern müssen, um sich daran zu erinnern, was eine polydivisible Zahl ist; ich hab's gerade auch getan.) Wenn sich die Menschheit anders entwickelt hätte und wir ein Vierersystem benutzten, hätte ich, im Zahnarztstuhl sitzend, zwei Lösungen finden können: 123 und 321. Im Fünfersystem gibt es keine Lösung, aber dafür wieder zwei im Sechsersystem (14 325 und 54 321), keine im Siebenersystem, erstaunliche drei im Achtersystem (3 254 167; 5 234 761 und 5 674 321), keine im Neunersystem und die eine im Zehnersystem, auf die wir schon gestoßen sind (381 654 729). Und das ist die letzte Lösung bis zum Vierzehnersystem, die 9C3A5476B812D lautet. Puh!

Ich war überrascht, dass es keine Lösungen im Zwölfersystem gibt. Wenn wir annehmen, dass unsere außerirdischen Freunde aus dem All zwölf Finger haben (ich weiß nicht, wie es Ihnen geht, aber ich habe das Gefühl, sie inzwischen recht gut zu kennen), könnten sie mit diesem Rätsel überhaupt nichts anfangen. (Ein weiterer Grund, den Duodezimalisten *nicht* zu folgen.) Als ich daher mein Computerprogramm schrieb, um nach diesen Zahlen zu suchen (ich hatte ein freies Wochenende), war das plötzliche Auftauchen einer Lösung für das Vierzehnersystem umso überraschender. Wenn es keine Lösung für das Zwölfersystem gibt, dachte ich, gibt es vielleicht auch keine Lösungen für höhere Systeme. Ich optimierte mein Programm so weit wie möglich, und es zeigte mir, dass keine Lösungen für Systeme zur Basis 15 und 16 existieren. Ich weiß nicht, ob es weitere Lösungen jenseits einer Basis 16 gibt.

Wenn irgendjemand von Ihnen mehr Zeit hat oder besser programmieren kann als ich, lassen Sie es mich *bitte* wissen!