



ALBERT
EINSTEIN

Grundzüge der Relativitäts- theorie

 Springer



ALBERT
EINSTEIN

Grundzüge der Relativitäts- theorie



Springer

ALBERT EINSTEIN
Grundzüge der Relativitätstheorie

ALBERT EINSTEIN

Grundzüge der Relativitätstheorie

7. Auflage
Mit 6 Abbildungen

 Springer

Das Umschlagbild zeigt *Albert Einstein* bei einer Vorlesung
am Collège de France im Jahre 1922.
Abdruck aus A. Pais, „Raffiniert ist der Herrgott . . .“. Albert Einstein.
Eine wissenschaftliche Biographie (Vieweg, Braunschweig, 1986). –
Das Original befindet sich im Einstein-Archiv, Princeton, USA.

Unter dem gleichen Titel ursprünglich erschienen bei
Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH
© 1990 6. Auflage Nachdruck
© 1956 The Hebrew University of Jerusalem, Israel

ISBN 978-3-540-87846-9

e-ISBN 978-3-540-87847-6

DOI 10.1007/978-3-540-87847-6

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie;
detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© 2009, 2002 Springer-Verlag Berlin Heidelberg

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zu widerhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Einbandgestaltung:
E. Kirchner, Heidelberg/WMXDesign GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier

9 8 7 6 5 4 3 2 1

springer.de

**Vorwort zur 1. Auflage der
„Vier Vorlesungen über Relativitätstheorie“**

In der vorliegenden Ausarbeitung von vier Vorträgen, die ich an der Universität Princeton im Mai 1921 gehalten habe, wollte ich die Hauptgedanken und mathematische Methoden der Relativitätstheorie zusammenfassen. Dabei habe ich mich bemüht, alles weniger Wesentliche wegzulassen, das Grundsätzliche aber doch so zu behandeln, daß das Ganze als Einführung für alle diejenigen dienen kann, welche die Elemente der höheren Mathematik beherrschen, aber nicht allzuviel Zeit und Mühe auf den Gegenstand verwenden wollen. Auf Vollständigkeit kann diese kurze Darlegung selbstverständlich keinen Anspruch machen, zumal ich die feineren, mehr mathematisch interessanten Entwicklungen, welche sich auf Variationsrechnung gründen, nicht behandelt habe. Mein Hauptziel war es, das Grundsätzliche in dem ganzen Gedankengang der Theorie klar hervortreten zu lassen.

Januar 1922

A. EINSTEIN

Vorbemerkung zum Anhang II

Für diese Auflage habe ich die „Verallgemeinerung der Gravitationstheorie“ unter dem Titel „Relativistische Theorie des nichtsymmetrischen Feldes“ völlig neu bearbeitet. Es ist mir nämlich gelungen — zum Teil unter Mitarbeit meiner Assistentin B. Kaufman — die Ableitungen sowie die Form der Feldgleichungen zu vereinfachen. Die ganze Theorie gewinnt dadurch an Durchsichtigkeit, ohne daß ihr Inhalt eine Änderung erfährt.

Dezember 1954

A. EINSTEIN

Inhaltsverzeichnis

Raum und Zeit in der vorrelativistischen Physik.	5
Spezielle Relativitätstheorie.	27
Allgemeine Relativitätstheorie.	57
Allgemeine Relativitätstheorie (Fortsetzung)	78
Anhang I	
Zum „kosmologischen Problem“	107
Anhang II	
Relativistische Theorie des nichtsymmetrischen Feldes .	131
Namen- und Sachverzeichnis	164

Raum und Zeit in der vorrelativistischen Physik

Die Relativitätstheorie ist aufs engste verbunden mit der Theorie von Raum und Zeit. Deshalb soll mit einer kurzen Untersuchung des Ursprungs unserer Ideen von Raum und Zeit begonnen werden, obwohl ich weiß, daß ich mich dabei auf strittiges Gebiet begebe. Alle Wissenschaft, sei es Naturwissenschaft oder Psychologie, sucht in gewisser Weise unsere Erlebnisse zu ordnen und in ein logisches System zu bringen. Wie hängen die geläufigen Ideen über Raum und Zeit mit dem Charakter unserer Erlebnisse zusammen?

Die Erlebnisse eines Menschen erscheinen uns als in eine Erlebnisreihe eingeordnet, in welcher die einzelnen unserer Erinnerung zugänglichen Einzelerlebnisse nach dem nicht weiter zu analysierenden Kriterium des „Früher“ und „Später“ geordnet erscheinen. Es besteht also für das Individuum eine Ich-Zeit oder subjektive Zeit. Diese ist an sich nichts Meßbares. Ich kann zwar den Erlebnissen Zahlen zuordnen, derart, daß dem späteren Erlebnis eine größere Zahl zugeordnet wird als dem früheren, aber die Art dieser Zuordnung bleibt zunächst in hohem Maße willkürlich. Ich kann jedoch die Art dieser Zuordnung weiter fixieren durch eine Uhr, indem ich den durch sie vermittelten Erlebnisablauf mit dem Ablauf der übrigen Erlebnisse vergleiche. Unter einer Uhr versteht man ein Ding, welches abzählbare Erlebnisse liefert und noch andere Eigenschaften besitzt, von denen im folgenden die Rede sein wird.

Verschiedene Menschen können mit Hilfe der Sprache ihre Erlebnisse bis zu einem gewissen Grade miteinander vergleichen. Dabei zeigt sich, daß gewisse sinnliche

Erlebnisse verschiedener Menschen einander entsprechen, während bei anderen ein solches Entsprechen nicht festgestellt werden kann. Jenen sinnlichen Erlebnissen verschiedener Individuen, welche einander entsprechen und demnach in gewissem Sinne überpersönlich sind, wird eine Realität gedanklich zugeordnet. Von ihr, daher mittelbar von der Gesamtheit jener Erlebnisse, handeln die Naturwissenschaften, speziell auch deren elementarste, die Physik. Relativ konstanten Erlebniskomplexen solcher Art entspricht der Begriff des physikalischen Körpers, speziell auch des festen Körpers. Die Uhr ist auch ein Körper bzw. ein körperliches System in diesem Sinne. Zum Wesen der Uhr gehört außerdem, daß die an ihr gezählten gleichartigen Teilvorgänge der Erlebnisfolge als einander gleich angesehen werden dürfen.

Begriffe und Begriffssysteme erhalten die Berechtigung nur dadurch, daß sie zum Überschauen von Erlebniskomplexen dienen; eine andere Legitimation gibt es für sie nicht. Es ist deshalb nach meiner Überzeugung einer der verderblichsten Taten der Philosophen, daß sie gewisse begriffliche Grundlagen der Naturwissenschaft aus dem der Kontrolle zugänglichen Gebiete des Empirisch-Zweckmäßigen in die unangreifbare Höhe des Denknotwendigen (Apriorischen) versetzt haben. Denn wenn es auch ausgemacht ist, daß die Begriffe nicht aus den Erlebnissen durch Logik (oder sonstwie) abgeleitet werden können, sondern in gewissem Sinn freie Schöpfungen des menschlichen Geistes sind, so sind sie doch ebensowenig unabhängig von der Art der Erlebnisse, wie etwa die Kleider von der Gestalt der menschlichen Leiber. Dies gilt im besonderen auch von unseren Begriffen über Zeit und Raum, welche die Physiker — von Tatsachen gezwungen — aus dem Olymp des Apriori herunterholen mußten, um sie reparieren und wieder in einen brauchbaren Zustand setzen zu können.

Wir kommen nun zu den räumlichen Begriffen und Urteilen. Auch hier ist es unerlässlich, die Beziehung

der Erlebnisse zu den Begriffen streng ins Auge zu fassen. Auf diesem Gebiete scheint mir POINCARÉ die Wahrheit besonders klar erfaßt zu haben in der Darstellung, welche er in seinem Buche: „*La science et l'hypothèse*“ gegeben hat. Unter allen Veränderungen, welche wir an festen Körpern wahrnehmen, sind diejenigen durch Einfachheit ausgezeichnet, welche durch willkürliche Bewegungen unseres Körpers rückgängig gemacht werden können; POINCARÉ nennt sie „Änderungen der Lage“. Durch bloße Lagenänderungen kann man zwei Körper „aneinander anlegen“. Das Fundament der Geometrie (Kongruenzsätze) bezieht sich auf die Gesetze, welche jene Lagerungsmöglichkeiten beherrschen. Für den Raumbegriff scheint uns folgendes wesentlich. Man kann durch Anlegen von Körpern $B, C \dots$ an einen Körper A neu Körper bilden, wir wollen sagen, den Körper A fortsetzen. Man kann einen Körper A so fortsetzen, daß er mit jedem anderen Körper X zur Berührung kommt. Wir können den Inbegriff aller Fortsetzungen des Körpers A als den „Raum des Körpers A “ bezeichnen. Dann gilt, daß alle Körper sich „im Raum des (beliebig gewählten) Körpers A “ befinden. Man kann in diesem Sinne nicht von dem „Raum“ schlechthin, sondern nur von dem „zu einem Körper A gehörigen Raum“ reden. Allerdings spielt im Alltagsleben der Körper Erdkruste eine so dominierende Rolle in der Beurteilung der Lagenverhältnisse der Körper, daß er zu dem ernstlich nicht zu verteidigenden Begriff *des Raumes* (schlechthin) geführt hat. Wir wollen aber, um diesen verhängnisvollen Irrtum auszuschließen, nur von „Bezugskörper“ oder „Bezugsraum“ reden. Erst die allgemeine Relativitätstheorie hat eine Verfeinerung dieses Begriffes nötig gemacht, wie wir später sehen werden.

Ich will nicht näher auf diejenigen Eigenschaften des Bezugsraumes eingehen, welche dazu geführt haben, als Element des Raumes den Punkt einzuführen und den Raum als Kontinuum aufzufassen. Ebensowenig

will ich zu analysieren versuchen, durch welche Eigen-
schaften des Bezugsraumes der Begriff der stetigen
Punktreihe oder Linie gerechtfertigt sei. Sind aber diese
Begriffe nebst ihrer Beziehung zum festen Körper der
Erlebniswelt gegeben, so ist leicht zu sagen, was unter
der Dreidimensionalität des Raumes zu verstehen ist,
nämlich die Aussage: Jedem Punkt lassen sich drei
Zahlen x_1 , x_2 und x_3 (Koordinaten) zuordnen, derart,
daß diese Zuordnung umkehrbar eindeutig ist, und daß
sich x_1 , x_2 und x_3 stetig ändern, wenn der zugehörige
Punkt eine stetig Punktreihe (Linie) beschreibt.

Die vorrelativistische Physik setzt voraus, daß die
Lagerungsgesetze idealer fester Körper der euklidischen
Geometrie gemäß seien. Was dies bedeutet, kann z. B.
wie folgt ausgedrückt werden. Zwei an einem festen
Körper markierte Punkte bilden eine Strecke. Eine
solche kann in mannigfacher Weise gegenüber dem
Bezugsraume ruhend gelagert werden. Wenn nun die
Punkte dieses Raumes so durch Koordinaten x_1 , x_2 , x_3
bezeichnet werden können, daß die Koordinatendiffe-
renzen Δx_1 , Δx_2 , Δx_3 der Streckenpunkte bei jeder
Lagerung der Strecke die nämliche Quadratsumme

$$s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 \quad (1)$$

liefern, so nennt man den Bezugsraum **EUKLIDISCH** und
die Koordinaten **kartesische**¹⁾. Es genügt hierfür sogar,
diese Annahme in der Grenze für unendlich kleine Strecken
zu machen. In dieser Annahme liegen einige weniger
spezielle enthalten, auf die wir ihrer grundlegenden
Bedeutung wegen aufmerksam machen wollen. Erstens
nämlich wird vorausgesetzt, daß man einen idealen
festen Körper beliebig bewegen könne. Zweitens wird
vorausgesetzt, daß das Lagerungsverhalten idealer fester
Körper in dem Sinne unabhängig vom Material des
Körpers und von seinen Ortsänderungen ist, daß zwei

¹⁾ Diese Relation muß gelten für beliebige Wahl des Anfangs-
punktes und der Richtung (Verhältnis $\Delta x_1 : \Delta x_2 : \Delta x_3$) der Strecke.

Strecken, welche *einmal* zur Deckung gebracht werden können, *stets und überall* zur Deckung gebracht werden können. Diese beiden Voraussetzungen, welche für die Geometrie und überhaupt für die messende Physik von grundlegender Bedeutung sind, entstammen natürlich der Erfahrung; sie beanspruchen in der allgemeinen Relativitätstheorie allerdings nur für (gegenüber astronomischen Dimensionen) unendlich kleine Körper und Bezugsräume Gültigkeit.

Die Größe s nennen wir die Länge der Strecke. Damit diese eindeutig bestimmt sei, muß die Länge einer bestimmten Strecke willkürlich festgesetzt, z. B. gleich 1 gesetzt werden (Einheitsmaßstab). Dann sind die Längen aller übrigen Strecken bestimmt. Setzt man die x , linear abhängig von einem Parameter λ

$$x_\nu = a_\nu + \lambda b_\nu,$$

so erhält man eine Linie, welche alle Eigenschaften der Geraden der euklidischen Geometrie besitzt. Speziell folgert man leicht, daß man durch n -maliges Abtragen einer Strecke s auf einer Geraden eine Strecke von der Länge $n \cdot s$ erhält. Eine Länge bedeutet also das Ergebnis einer längs einer Geraden ausgeführten Messung mit Hilfe des Einheitsmaßstabes; sie hat ebenso wie die gerade Linie eine vom Koordinatensystem unabhängige Bedeutung, wie aus dem Folgenden hervorgeht.

Wir kommen nun zu einem Gedankengang, der in analoger Weise in der speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie eine Rolle spielt. Wir fragen: Gibt es außer den verwendeten kartesischen Koordinaten noch andere gleichberechtigte? Die Strecke hat eine von der Koordinatenwahl unabhängige physikalische Bedeutung, ebenso also auch die Kugelfläche, welche man erhält als Ort der Endpunkte aller gleichen Strecken, welche man von einem beliebigen Anfangspunkt des Bezugsräumes aus abträgt. Sind sowohl x_ν als auch x'_ν (ν von 1 bis 3) kartesische Koordinaten unseres Bezugsräumes, so wird die Kugelfläche in bezug auf jene

beiden Koordinatensysteme durch die Gleichungen ausgedrückt:

$$\sum \Delta x_{\nu}^2 = \text{konst.} \quad (2)$$

$$\sum \Delta x_{\nu}'^2 = \text{konst.} \quad (2a)$$

Wie müssen sich die x_{ν}' aus den x_{ν} ausdrücken, damit die Gleichungen (2) und (2a) äquivalent seien? Denkt man sich die x_{ν}' in Funktion der x_{ν} ausgedrückt, so kann man für genügend kleine Δx_{ν} nach dem TAYLORSCHEN Satze setzen:

$$\Delta x_{\nu}' = \sum_{\alpha} \frac{\partial x_{\nu}'}{\partial x_{\alpha}} \Delta x_{\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \beta} \frac{\partial^2 x_{\nu}'}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} \Delta x_{\alpha} \Delta x_{\beta} \dots$$

Setzt man dies in (2a) ein und vergleicht mit (1), so sieht man, daß die x_{ν}' lineare Gleichungen der x_{ν} sein müssen. Setzt man demgemäß

$$x_{\nu}' = a_{\nu} + \sum_{\alpha} b_{\nu \alpha} x_{\alpha} \quad (3)$$

oder

$$\Delta x_{\nu}' = \sum_{\alpha} b_{\nu \alpha} \Delta x_{\alpha} \quad (3a)$$

so drückt sich die Äquivalenz der Gleichungen (2) und (2a) in der Form aus

$$\sum \Delta x_{\nu}'^2 = \lambda^2 \sum \Delta x_{\nu}^2 \quad (\lambda \text{ von den } \Delta x_{\nu} \text{ unabhängig}). \quad (2b)$$

Hieraus folgt zunächst, daß λ eine Konstante sein muß. Setzt man zunächst $\lambda = 1$, so liefern (2b) und (3a) die Bedingungen

$$\sum_{\alpha} b_{\nu \alpha} b_{\nu \beta} = \delta_{\alpha \beta}, \quad (4)$$

wobei $\delta_{\alpha \beta} = 1$ oder $\delta_{\alpha \beta} = 0$ ist, je nachdem $\alpha = \beta$ oder $\alpha \neq \beta$. Die Bedingungen (4) heißen Orthogonalitätsbedingungen, die Transformationen (3), (4) lineare orthogonale Transformationen. Verlangt man, daß $s^2 = \sum \Delta x_{\nu}^2$ für jedes Koordinatensystem gleich dem Quadrat der Länge sei und daß stets mit dem gleichen Einheitsmaßstabe gemessen werde, so muß $\lambda = 1$ sein. Dann sind die linearen orthogonalen Transformationen die einzigen, welche den Übergang von einem kartesischen

Koordinatensystem eines Bezugsraumes zu einem anderen vermitteln. Man erkennt, daß bei Anwendung solcher Transformationen die Gleichungen einer Geraden wieder in die Gleichungen einer Geraden übergehen. Wir bilden noch die Umkehrung der Gleichungen (3a), indem wir beiderseits mit $b_{\nu\beta}$ multiplizieren und über ν summieren. Man erhält

$$\sum b_{\nu\beta} \Delta x'_\nu = \sum_{\nu\alpha} b_{\nu\alpha} b_{\nu\beta} \Delta x_\alpha = \sum_\alpha \delta_{\alpha\beta} \Delta x_\alpha = \Delta x_\beta. \quad (5)$$

Dieselben Koeffizienten b vermitteln also auch die inverse Substitution der Δx_ν . Geometrisch ist $b_{\nu\alpha}$ der Kosinus des Winkels zwischen der x'_ν -Achse und der x_α -Achse.

Zusammenfassend können wir sagen: In der euklidischen Geometrie gibt es (in einem gegebenen Bezugsraume) bevorzugte Koordinatensysteme, die kartesischen, welche auseinander durch lineare orthogonale Transformation der Koordinaten hervorgehen. In solchen Koordinaten drückt sich der mit dem Maßstab meßbare Abstand s zweier Punkte des Bezugsraumes in besonders einfacher Weise aus. Auf diesen Begriff des Abstandes läßt sich die ganze Geometrie gründen. In der gegebenen Darstellung bezieht sich die Geometrie auf wirkliche Dinge (feste Körper), und ihre Sätze sind Behauptungen über das Verhalten dieser Dinge, welche zutreffend oder auch unzutreffend sein können.

Gewöhnlich pflegt man die Geometrie so zu lehren, daß eine Beziehung der Begriffe zu den Erlebnissen nicht hergestellt wird. Es hat auch Vorteile, dasjenige, was an ihr rein logisch und von der prinzipiell unvollkommenen Empirie unabhängig ist, zu isolieren. Der reine Mathematiker kann sich damit begnügen. Er ist zufrieden, wenn seine Sätze richtig, d. h. ohne logische Fehler aus den Axiomen abgeleitet sind. Die Frage, ob die euklidische Geometrie *wahr* ist oder nicht, hat für ihn keinen Sinn. Für unseren Zweck aber ist es nötig, den Grundbegriffen der Geometrie Naturobjekte zuzu-

ordnen; ohne eine solche Zuordnung ist die Geometrie für den Physiker gegenstandslos. Für den Physiker hat es daher wohl einen Sinn, nach der Wahrheit bzw. dem Zutreffen der geometrischen Sätze zu sprechen. Daß die so interpretierte euklidische Geometrie nicht nur Selbstverständliches, d. h. durch Definitionen logisch Bedingtes ausspricht, erkennt man durch folgende einfache Überlegung, welche von HELMHOLTZ herröhrt:

Zwischen n Punkten des Raumes gibt es $\frac{1}{2} n(n-1)$

Abstände $s_{\mu\nu}$; zwischen diesen und den $3n$ Koordinaten bestehen die Relationen

$$s_{\mu\nu}^2 = (x_{1(\mu)} - x_{1(\nu)})^2 + (x_{2(\mu)} - x_{2(\nu)})^2 + \dots$$

Aus diesen $\frac{n(n-1)}{2}$ Gleichungen lassen sich die $3n$ Koordinaten eliminieren, aus welcher Elimination mindestens $\frac{n(n-1)}{2} - 3n$ Gleichungen zwischen den $s_{\mu\nu}$ folgen müssen¹⁾. Da die $s_{\mu\nu}$ meßbare Größen sind, die ihrer Definition nach voneinander unabhängig sind, brauchen diese Beziehungen zwischen den $s_{\mu\nu}$ a priori nicht zu bestehen.

Aus dem Vorhergehenden zeigt sich, daß die Transformationsgleichungen (3), (4) für die euklidische Geometrie eine fundamentale Bedeutung besitzen, indem sie den Übergang von einem kartesischen Koordinatensystem zu einem anderen beherrschen. Das kartesische Koordinatensystem zeichnet sich dadurch aus, daß sich in bezug auf jedes solche der meßbare Abstand s zweier Punkte durch die Gleichung

$$s^2 = \sum \Delta x_\nu^2$$

ausdrückt. Sind $K_{(x_\nu)}$ und $K'_{(x'_\nu)}$ zwei kartesische Koor-

1) In Wahrheit sind es $\frac{n(n-1)}{2} - 3n + 6$ Gleichungen.