Holger Dambeck

Kommen drei Logiker in eine Bar ...

Die schönsten Mathe-Rätsel

Kiepenheuer & Witsch

MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C083411
www.fsc.org

Verlag Kiepenheuer & Witsch, FSC® N001512

1. Auflage 2017

Umschlaggestaltung: Barbara Thoben, Köln
Umschlagmotiv: © Leo Leowald
Illustrationen: Michael Niestedt
Gesetzt aus der Minion, der News Gothic und der Bradley Hand ITC
Satz: Buch-Werkstatt GmbH, Bad Aibling
Druck und Bindung: CPI books GmbH, Leck
ISBN 978-3-462-05051-6

Vorwort

Was ist eigentlich Mathematik?
Diese Frage höre ich immer wieder. Ich weiß, dass viele Menschen glauben, Mathematik habe mit Rechnen zu tun. Und vielleicht noch mit Formeln.
Doch in der Mathematik geht es gerade darum, das Rechnen zu vermeiden, wie möglichst auch alles andere, was umständlich und kompliziert ist. Das würde so zwar nicht jeder Mathematiker unterschreiben. Aber zumindest für die Rätsel dieses Buches trifft es auf jeden Fall zu.
Es ist ein Mix aus Aufgaben, die bereits bei SPIEGEL ONLINE als Rätsel der Woche erschienen sind und aus neuen Kopfnüssen, die ich für dieses Buch ausgewählt habe.

Rätsel gehören ins Genre der sogenannten Unterhaltungsmathematik. Den Begriff finde ich ehrlich gesagt unpassend, er erinnert mich irgendwie an Unterhaltungsmusik. Und dann habe ich immer gleich schreckliche Schlagermusik im Ohr.
Aber egal: Sich mit Mathematik zu beschäftigen, kann großen Spaß machen, ja, es kann sehr unterhaltsam sein. Unser Gehirn wird auf eine Weise beansprucht, die wir aus dem Alltag kaum kennen. Und ich finde, es geht nichts über das Aha-Er-

lebnis, wenn uns plötzlich die Lösung einer scheinbar unlösbaren Aufgabe erscheint.

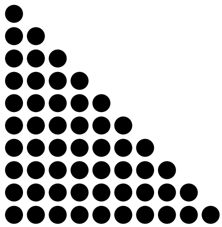
Wie gesagt: Mathematik ist unter anderem, wenn man umständliches Rechnen vermeidet. Weil es oft viel kreativere, viel elegantere Wege gibt, eine Aufgabe zu lösen, als das Schema F, das wir in der Schule stupide gelernt haben.

Zwei Beispiele sollen das demonstrieren. Das erste kennen Sie wahrscheinlich:

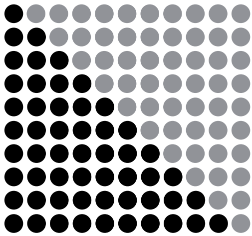
Was ist die Summe der Zahlen von 1 bis 10?

Es gibt eine sehr schöne, quasi geometrische Lösung: Wir schreiben die zehn Zahlen als Punktmengen. Es gibt zehn Reihen. In der ersten ist ein Punkt, in der zweiten sind zwei und so weiter bis zur zehnten Reihe mit zehn Punkten.

Die folgende Skizze zeigt die Punkte – sie hilft uns allerdings zunächst nicht weiter.



Wenn wir aber die gleiche Punktmenge noch einmal um 180 Grad gedreht rechts daneben setzen, haben wir die Aufgabe gelöst.

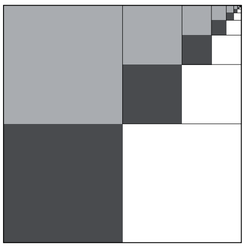


Die beiden zusammengeschobenen Punktmengen bilden ein Rechteck aus zehn mal elf Punkten – also aus 110 Punkten. Diese Zahl müssen wir nur noch durch zwei teilen, weil die Punktmenge ja zweimal drinsteckt, und schon haben wir die richtige Lösung von 55.

Das zweite Beispiel ist nicht ganz so leicht – aber auch dabei besteht der Beweis aus einer einfachen Skizze, die nahezu selbsterklärend ist.

Wie groß ist die Summe von 1/4 + 1/16 + 1/64 + 1/256 + …?
Also der Reziproken der Viererpotenzen beginnend bei 1/4?

Die Lösung lautet 1/3. Als Beweis dient ein Quadrat, das geviertelt wird. Und bei dem das obere rechte Viertel nochmals geviertelt wird – und zwar immer wieder. Siehe folgende Zeichnung:



Wenn wir die Summe 1/4 + 1/16 + 1/64 +... berechnen wollen, brauchen wir nur die dunkelgrauen Flächen aufzusummieren. Denn sie entsprechen 1/4, 1/16, 1/64 ... der Quadratfläche. Jetzt kommt der entscheidende Trick: Nehmen wir zu jeder schwarzen Fläche auch die jeweils gleich großen weißen und hellgrauen Fläche hinzu, ist die Summe über all diese Flächen genauso groß wie das gesamte Quadrat. Also gilt:

$$1 = 3 \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots\right)$$

Das teilen wir durch drei und haben das richtige Ergebnis.

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots$$

War das zu kompliziert? Ich hoffe nicht.

Ich wünsche Ihnen viel Spaß mit den folgenden hundert Aufgaben! Und dass Sie möglichst oft erleben, wie aus dem Nichts eine elegante Lösung auftaucht.

Holger Dambeck
Hamburg, den 15.6.2017

Systematisch kreativ
Wie man Matherätsel angeht

Es ist sicher kein Zufall, dass Sie dieses Buch in den Händen halten. Sie mögen wahrscheinlich Mathematik – und sicher knobeln Sie auch gern. Damit Sie an den Rätseln auf den folgenden Seiten nicht verzweifeln, möchte ich Ihnen vorab ein paar Tipps geben. Leider kann ich Ihnen keine allgemein gültige Lösungsstrategie liefern – die gibt es schlicht nicht. Aber zumindest ein paar Ideen, wie man sich Kopfnüssen nähert.
Wenn Sie mein Buch »Je mehr Löcher, desto weniger Käse« gelesen haben, wird Ihnen der eine oder andere Tipp bekannt vorkommen. Dort gab es ein ganzes Kapitel über das Finden kreativer Lösungen. Ich habe meine Tipps hier kompakter formuliert und noch erweitert.

Nicht aufgeben, dranbleiben

Seien Sie beharrlich! Wenn Sie ein Problem lösen wollen, sollten Sie es erst einmal gründlich durchdenken. Blättern Sie nicht gleich zu den Lösungen, wenn Sie nicht sofort vorankommen. Haben Sie Geduld, lassen Sie das Problem ruhig erst mal sacken. Wenn Sie nicht weiterkommen, probieren Sie einfach erst einmal das nächste Rätsel. Das bringt Sie auf andere Gedanken und kann helfen, das bislang ungelöste Problem zu knacken. Womöglich kommt die zündende Idee auch ganz überraschend – zum Beispiel am nächsten Morgen beim Zähneputzen.

Aufgabentext genau analysieren

Zuallererst müssen Sie natürlich die Aufgabe selbst verstehen. Wenn Ihnen beim Lesen des Textes etwas spanisch vorkommt, sollten Sie aufhorchen. Oft liefern solche Stolpersteine in der Aufgabe nämlich wertvolle Hinweise. Nehmen wir als Beispiel Rätsel Nummer 12 aus diesem Buch:

> Zwei russische Mathematiker treffen sich zufällig im Flugzeug.
> »Du hast drei Söhne, nicht wahr?«, fragt der eine. »Wie alt sind die denn jetzt?«
> »Das Produkt der Jahre ist 36«, lautet die Antwort, »und die Summe der Jahre ist genau das heutige Datum.«
> »Hm, das reicht mir noch nicht«, meint darauf der Kollege.
> »Oh ja, stimmt, ich habe ganz vergessen zu erwähnen, dass mein ältester Sohn einen Hund hat.«
> Wie alt sind die drei Söhne?

Finden Sie den Hinweis auf den Hund auch seltsam? Wenn Sie genauer darüber nachdenken, merken Sie, dass anstelle des Hundes auch eine Katze, eine Spielkonsole oder eine Haarfarbe stehen könnte. Trotzdem ist dieser Satz wichtig, aber wegen eines anderen Details. Mehr möchte ich an dieser Stelle noch nicht verraten.

Systematisch vorgehen

Sofern die möglichen Lösungen halbwegs überschaubar sind, kann es sich lohnen, alle denkbaren Kombinationen aufzuschreiben und sich jede einzeln anzuschauen. Das gilt ganz besonders für Logikrätsel. Beispiel: Sie haben die Aussagen von drei Personen und wissen, dass eine davon lügt. Wer könnte der Lügner sein?

Person A: »B lügt.«
Person B: »C lügt.«
Person C: »Ich lüge nicht.«

Machen Sie eine kleine Tabelle, auch Wahrheitstabelle genannt, in der alle möglichen Fälle als eigene Spalte auftauchen:

	Fall 1	Fall 2	Fall 3
Person A: »B lügt«	Lüge	wahr	wahr
Person B: »C lügt«	wahr	Lüge	wahr
Person C: »Ich lüge nicht«	wahr	wahr	Lüge
	möglich	möglich	Widerspruch

Dann untersuchen Sie für jeden Fall, ob die Aussagen dazu passen. Für die Fälle 1 und 2 trifft das zu, im Fall 3 jedoch gibt es einen logischen Widerspruch. A behauptet, dass B lügt – aber der Lügner soll in diesem Fall ja C sein. Wegen dieses Widerspruchs ist Fall 3 nicht möglich und entfällt. Damit wissen wir, dass C auf jeden Fall kein Lügner ist und somit die Wahrheit sagt. Der Lügner ist entweder A oder B.

Wenn möglich, vereinfachen

Oft geht es darum, etwas ganz allgemein zu beweisen – für alle denkbaren Konstellationen oder zumindest für große Anzahlen. Das kann einen überfordern, wenn man sich in das Problem hineindenken möchte. Wenn an einem Tisch zum Beispiel 100 Lügner und 100 Wahrheitsliebende sitzen, die komische Dinge sagen, schauen Sie sich doch erst mal eine stark vereinfachte Version an. Am Tisch sitzen dann eben zunächst nur zwei Lügner und zwei Personen, die stets die Wahrheit sagen. Versuchen Sie, das Problem erst in der simpleren Variante zu lösen. Vielleicht finden Sie dabei auch Wege, das größere Problem zu knacken.

Anders denken

Ausgetretene Pfade verlassen – das ist eine der wichtigsten Methoden, um kreative Ideen zu entwickeln. In der Mathematik fällt das oft schwer, weil wir einfach zu sehr in Lösungstechniken denken, die wir gelernt haben. Das ist wie Reisen mit der Eisenbahn. Wir können so nur die Orte erreichen, zu denen auch Schienen führen.
Oft hilft es schon, den Blickwinkel zu wechseln oder die Problemstellung etwas zu verändern. Vielleicht lässt sich eine Aufgabe mit Zahlen auch geometrisch lösen? Ein paar Beispiele:

> Ein Mann startet seine Wanderung um 10 Uhr im Tal, um 14 Uhr kommt er an der Berghütte an. Dort übernachtet er und startet am nächsten Morgen um 10 Uhr die Wanderung zurück ins Tal. Weil es bergab geht, ist er eine ganze Weile

vor 14 Uhr wieder zurück. Beweisen Sie, dass es mindestens eine Uhrzeit zwischen 10 und 14 Uhr gibt, zu der sich der Wanderer an beiden Tagen in exakt derselben Höhe befunden hat!

Wir wissen nichts über den Höhenverlauf der Wanderung und auch nichts über die Wandergeschwindigkeit. Trotzdem ist die Lösung ganz einfach, wenn wir die Aufgabe etwas verändern:

Zwei Männer starten um 10 Uhr eine höchstens vierstündige Wanderung. Der eine steigt aus dem Tal kommend auf den Berg, der andere ist in der entgegengesetzten Richtung unterwegs. Beweisen Sie, dass es mindestens eine Uhrzeit zwischen 10 und 14 Uhr gibt, zu der sich die Wanderer in exakt derselben Höhe befinden!

Nun, die Lösung ist einfach: Es ist der Moment, in dem sich die beiden Wanderer auf dem Wanderweg begegnen.

Noch eine andere Aufgabe:

Wie groß ist die Summe $1+2+3+4+\ldots+97+98+99+100$?

Man könnte das natürlich im Kopf oder mit einem Taschenrechner ausrechnen. Aber schon der junge Carl Friedrich Gauß wusste einen besseren Weg. Er sortierte die Zahlen um:

Wie groß ist die Summe $1+100+2+99+\ldots+50+51$?

Das Ergebnis können wir direkt hinschreiben – es lautet $50\times 101=5.050$.

Im letzten Beispiel für kreative Lösungswege geht es um einen Kalender, bei dem ein ganz besonderer Trick gefragt ist:

> Ein Mann hat zwei Holzwürfel, mit denen er den Tag eines Monats von 01 bis 31 darstellen kann. Welche Ziffern stehen auf den Seiten der beiden Würfel?

Die Analyse des Problems ist relativ leicht: Auf jeden Würfel passen nur sechs Ziffern, also muss man die Ziffern von 0 bis 9 über beide Würfel verteilen. Fragt sich bloß wie? Die Tage eines Monats beginnen mit 01 und gehen bis 31. Es gibt also auf jeden Fall eine 11 und eine 22 – also müssen die 1 und die 2 auf beiden Würfeln vorkommen.

Wir brauchen jedoch auch auf beiden Würfeln die 0, um alle Tage von 01 bis 09 darstellen zu können. Denn es gibt neun Ziffern von 1 bis 9, und auf einen Würfel passen nur sechs verschiedene.

0, 1, 2 – damit sind auf den zwei Würfeln schon drei Seiten belegt. Sechs der insgesamt zwölf Seiten sind noch frei – dummerweise sind aber noch sieben Ziffern übrig –, nämlich 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Wenn wir zum Beispiel den ersten Würfel mit 0, 1, 2, 3, 4, 5 und den zweiten mit 0, 1, 2, 6, 7, 8 beschriften, ist die 9 nicht untergebracht.

Was nun? Existiert womöglich gar keine Lösung? Doch, es gibt eine, und wir haben sie sogar schon gefunden. Denn wenn wir eine 9 brauchen, stellen wir die 6 einfach auf den Kopf – und damit ist das Rätsel des Würfelkalenders gelöst.

Social Engineering

Manchmal sitze ich an einer Knobelaufgabe, von der ich fürchte, dass sie womöglich unüberschaubar viele Lösungen haben könnte. Nehmen wir folgendes Beispiel:

> Finden Sie alle zehnstelligen Primzahlen, die jede der zehn Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 enthält. (Eine Primzahl ist nur durch 1 und sich selbst teilbar.)

Wenn Sie sich ein wenig mit Kombinatorik auskennen, wissen Sie, dass aus den zehn Ziffern mehr als 3 Millionen verschiedene Zahlen gebildet werden können. Wie soll man bei jeder davon prüfen, ob sie eine Primzahl ist? Wer denkt sich eine so schwierige Aufgabe aus?

Viel wahrscheinlicher ist, dass es nur eine einzige oder gar keine Lösung gibt. In unserem Fall trifft Letzteres zu: Die Quersumme aller aus den zehn Ziffern gebildeten Zahlen ist immer gleich, nämlich 45 $(= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9)$. Und 45 ist sowohl durch 3 als auch durch 9 teilbar. Damit haben wir bewiesen, dass alle diese Zahlen selbst durch 3 und 9 teilbar sind – und dass sie deshalb keine Primzahlen sein können.

Indirekt statt direkt

Eben ging es um theoretisch mehr als drei Millionen verschiedene Zahlen. Wir gehen noch einen Schritt weiter bis zu unendlich vielen.

Beweisen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen gibt!

Wir könnten versuchen, alle Primzahlen durchzunummerieren. Dabei würden wir feststellen, dass das Ganze einfach kein Ende nimmt. So kriegt man den Beweis auf keinen Fall hin.
Statt das Problem direkt zu lösen, gehen wir indirekt vor – quasi hintenherum. Einbrecher machen es im Grunde genauso: Sie knacken nicht etwa das dicke Schloss an der Hauseingangstür. Nein, sie gehen zur Rückseite des Hauses und finden dort ein leicht zu öffnendes Kellerfenster.
Bei einem indirekten Beweis beweisen wir eine Aussage nicht direkt – wir widerlegen stattdessen ihr Gegenteil. Dass indirekte Beweise überhaupt möglich sind, liegt an der logischen Konsistenz der Mathematik. Eine Aussage ist entweder richtig oder falsch. Und zwei sich widersprechende Aussagen können nicht zugleich wahr sein.
Wir nehmen also an, dass es nur endlich viele Primzahlen gibt – und zwar n. Diese Primzahlen nennen wir p_1, p_2, p_3 … p_n. Nun bilden wir das Produkt:

$$p_1 \times p_2 \times p_3 \times \ldots \times p_n$$

Das ist eine natürliche Zahl mit einer interessanten Eigenschaft: Sie ist durch jede der n Primzahlen p_1, p_2, p_3 … p_n teilbar. Denn die Zahl ist ja das Produkt all dieser Primzahlen. Jetzt kommt der eigentliche Trick. Wir addieren zu dem Produkt der n Primzahlen noch die Zahl 1 hinzu:

$$p_1 \times p_2 \times p_3 \times \ldots \times p_n + 1$$

Diese Zahl ist ebenfalls eine natürliche Zahl. Allerdings ist sie durch keine der n Primzahlen teilbar, sie lässt bei der Division vielmehr immer den Rest 1. Deshalb muss diese Zahl selbst eine Primzahl sein, die nicht in p_1, p_2, p_3 … p_n enthalten ist – oder sie ist das Produkt zweier oder mehrerer Primzahlen, die nicht zu den n vorgegebenen Primzahlen gehören. Das widerspricht jedoch unserer Annahme, dass nur n Primzahlen existieren. Also ist die Annahme, dass es endlich viele Primzahlen gibt, falsch – was wiederum bedeutet, dass es unendlich viele davon gibt. Damit ist der Satz bewiesen.
Zugegeben: Indirekte Beweise lesen sich komisch, man muss auch höllisch aufpassen, was das Gegenteil einer Aussage ist. Aber die Methode ist sehr hilfreich.

Schubfachprinzip

Sie kennen das: Den ganzen Tag müssen wir Dinge ordnen und sortieren. Schubfächer haben sich dabei als hilfreich erwiesen – in virtueller Form auch in der Mathematik! Wie das Schubfachprinzip funktioniert, zeigt die folgende kleine Aufgabe:

> Im Keller des Sportvereins stehen Skistöcke in den Farben Weiß, Rot, Blau und Grün. Sie sind alle gleich lang. Der Zeugwart will ein Paar Stöcke holen. Doch leider ist das Licht im Keller ausgefallen und er sieht überhaupt nichts. Wie viele

zufällig gegriffene Stöcke muss er mit nach oben bringen, damit auf jeden Fall zwei gleicher Farbe darunter sind?

Wir haben vier Schubfächer, jedes hat eine andere Farbe. Wenn wir blindlings Stöcke greifen und dann bei Licht in die Schubfächer sortieren, sind wir beim fünften Skistock mit Sicherheit am Ziel. Denn der fünfte Stock gehört zwingend in ein Fach, in dem bereits ein Stock liegt.

Domino-Methode

Wenn es um Aussagen geht, die für alle natürlichen Zahlen n zutreffen, kann die sogenannte vollständige Induktion das Mittel der Wahl sein. Ich nenne sie allerdings lieber Domino-Methode, denn dann versteht man sofort, wie ein solcher Beweis funktioniert.
Was sind die Voraussetzungen dafür, dass alle auf einem Tisch aufgestellten Dominosteine umfallen? Es sind genau zwei:

- Der erste Stein muss fallen.
- Jeder Stein steht so, dass er beim Kippen seinen Nachfolger zu Fall bringt.

Als Beispiel für die Domino-Methode nehmen wir die Summenformel für ungerade natürliche Zahlen. Schauen Sie sich bitte einmal folgende Gleichungen an:

$$1 = 1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$1+3+5=9=3^2$$

$$1+3+5+7=16=4^2$$

$$1+3+5+7+9=25=5^2$$

Offenbar addieren sich ungerade Zahlen, wenn man mit der 1 beginnt, immer zu einer Quadratzahl. Ungerade Zahlen können wir in der Form $2n+1$ oder $2n-1$ schreiben, wobei n eine natürliche Zahl ist. Wenn wir auf der rechten Seite der Gleichung n^2 notieren, dann muss die größte ungerade Zahl links $2n-1$ sein. Allgemein geschrieben lautet unsere Vermutung daher:

$$1+3+\ldots+2n-1=n^2$$

Nun zum Domino-Beweis: Für $n=1, 2, 3, 4, 5$ gilt die Formel auf jeden Fall. Das bedeutet, dass nicht nur der erste, sondern sogar die ersten fünf Dominosteine auf jeden Fall umkippen. Der Anfang ist also gemacht.

Jetzt greifen wir uns einen beliebigen Dominostein heraus, den Stein Nummer i. Dabei ist i eine natürliche Zahl. Wir nehmen an, dass dieser Stein umkippt. Und Umkippen bedeutet hier, dass die Summenformel für ihn zutrifft.

$$\text{Summe}(i)=1+3+5+\ldots+2i-1=i^2$$

Was aber ist mit dem nächsten Stein mit der Nummer $i+1$? Trifft die Summenformel für ihn auch zu? Das können wir relativ leicht ausrechnen. Um die Summenformel für $i+1$ zu erhalten, muss ich zu der Summenformel von i nur die nächste, fehlende ungerade Zahl addieren. Und diese lautet $2(i+1)-1$.

$$\text{Summe}(i+1) = \text{Summe}(i) + 2(i+1) - 1$$

$$= \text{Summe}(i) + 2i + 1$$

$$= i^2 + 2i + 1$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite dürfte Ihnen bekannt vorkommen. Es ist eine binomische Formel von der Form

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Wobei $a = i$ und $b = 1$ ist. Also erhalten wir:

$$\text{Summe }(i+1) = (i+1)^2$$

Damit haben wir gezeigt, dass die Summenformel auch für $n = i + 1$ gilt, sofern wir voraussetzen, dass sie für $n = i$ zutrifft. Das bedeutet, dass unsere Summenformel für alle beliebigen natürlichen Zahlen n gültig ist.

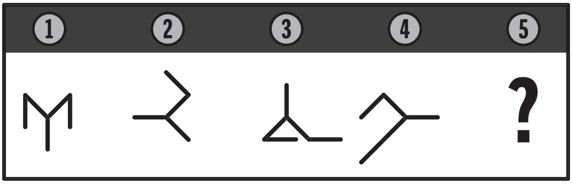

Aufgaben

Uhren, Kerzen und Pistolen: Rätselklassiker

Zum Einstieg gibt’s eine Sammlung altbewährter Klassiker. Die Aufgaben sind vielseitig und nicht allzu schwer. Mit der Übung kommt der Spaß – und die Lust auf noch viel mehr Rätsel in den folgenden Kapiteln. Legen Sie los!

1) Welche Figur setzt die Reihe fort?

Sie kennen diese Rätselform ganz sicher: Vier bizarr anmutende Bildchen stehen nebeneinander, gern bestehend aus Kreuzen, Kreisen und farbig eingefärbt. Und Sie sollen aus vier, fünf anderen Zeichnungen jene auswählen, die, mit welcher Logik auch immer, als fünfte genau in die Reihe der anderen vier passt.
Gefragt sind dabei vor allem analytisches Denken und Logik, mitunter aber auch Kreativität und Querdenken. Kein Wunder, dass solche Aufgaben häufig Teil von IQ- oder Einstellungstests sind.



Bei der Aufgabe hier gibt es keine vorgegebene Liste möglicher Lösungen. Sie müssen Figur 5 vielmehr selbst finden und zu Papier bringen. Das schaffen Sie bestimmt, oder?

2) Schokolade wiegen

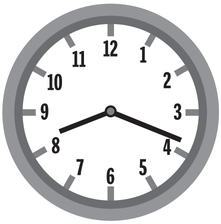
Mit Waagen kann man raffinierte Dinge anstellen – und ich hoffe, dass das auch Ihnen beim folgenden Problem gelingt: Genau 100 Gramm soll eine Tafel Vollmilchschokolade schwer sein. Dank moderner Technik ist das auch kein Problem. Die flüssige Schokoladenmenge wird passend portioniert, bevor sie in die Form fließt. Doch manchmal geht trotzdem etwas schief – so wie in unserem Fall.

Wegen einer falsch eingestellten Maschine sind die Tafeln einer ganzen Palette 5 Gramm zu schwer. Der Vorarbeiter hat den Fehler zum Glück schnell bemerkt und die Maschine neu justiert.
Die Palette mit den zu schweren Tafeln hat er ins Lager gebracht – sich aber vor lauter Ärger über den Fehler nicht gemerkt, wo er die 105-Gramm-Tafeln abgestellt hat. Im Lager gibt es insgesamt 10 Paletten, nur bei einer stimmt die Masse der Tafeln nicht.

Ihre Aufgabe: Finden Sie den Stapel mit den 105-Gramm-Tafeln! Sie dürfen beliebig viele Schokoladentafeln von den Paletten nehmen und auf die Waage legen. Doch die Digitalwaage, welche die Masse auf 0,001 Gramm genau anzeigt, darf nur ein einziges Mal benutzt werden.

3) Perfekt ausgerichtete Uhrzeiger

Nach dem Wiegen kommen die Uhrzeiger. Es geht um einen magischen Moment am Abend: Es ist Sonntag, wenige Minuten nach 20.15 Uhr. Das Knabberzeug steht bereit, ebenso das kühle Bier. Ein »Tatort«-Fan hat es sich auf dem Sofa gemütlich gemacht. Noch ist kein Mord passiert, aber das kann nicht mehr allzu lange dauern.
Der Mann schaut kurz auf die Wanduhr und stutzt: Sind großer und kleiner Zeiger in diesem Moment nicht exakt gleich weit von der 6 auf dem Ziffernblatt entfernt? Die Winkel scheinen in der Tat gleich groß zu sein.



Aber ist das überhaupt möglich? Und falls ja: Wie lautet die genaue Uhrzeit in diesem Moment?

Hinweis: Wir nehmen an, dass sich die Zeiger mit konstanter Geschwindigkeit drehen und nicht etwa springen.

4) Ein Gangster überlebt – aber warum?

Von ganz anderer Art ist das folgende Problem, in dem es um Leben und Tod geht. Es ist kurz vor Mitternacht, als sich fünf dunkle Gestalten auf einem düsteren Platz treffen. Die Gangster sind seit Jahren untereinander zerstritten – jetzt wollen sie die Waffen sprechen lassen. Sie stehen alle unterschiedlich weit voneinander entfernt.
Jeder von ihnen hat genau einen Schuss im Revolver und zielt auf seinen nächsten Nachbarn. Punkt Mitternacht, als die Kirchenglocke läutet, drücken die fünf Männer ab. Jeder Schuss ist tödlich.

Beweisen Sie, dass mindestens einer der Gangster überlebt!

5) Wasser im Wein

Weiter geht es mit einem Problem, bei dem man sich schnell mal verzetteln kann. Mein Tipp: Machen Sie die Sache nicht komplizierter als sie ist.

Auf dem Tisch stehen zwei identisch große Gläser. Eines ist mit Wein gefüllt, in dem anderen befindet sich exakt das gleiche Volumen Wasser. Nun schütten Sie etwas Wein in das Wasserglas und rühren die Mischung gut um. Anschließend kippen Sie vom Wein-Wasser-Gemisch so viel zurück ins Weinglas, dass beide Gläser wieder genau gleich voll sind.

Nun die Frage: Ist dann mehr Wein im Wasser oder mehr Wasser im Wein? Oder sind die Anteile vielleicht gleich groß?

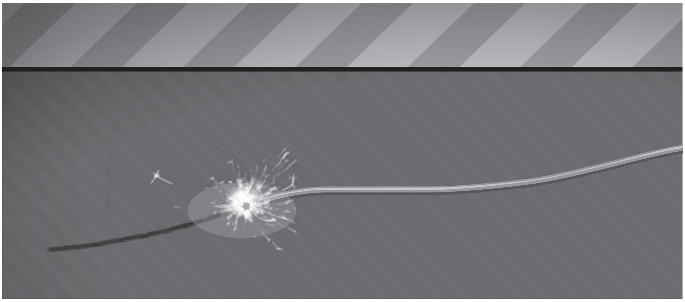
Zwei Hinweise: Wir gehen davon aus, dass beim Umrühren keine Flüssigkeit verloren geht – etwa weil sie am Löffel haftet. Außerdem ignorieren wir, dass Wein neben Alkohol größtenteils aus Wasser besteht. Wir betrachten den Wein vielmehr als eine eigenständige Flüssigkeit, welche sich problemlos mit Wasser mischen lässt.

6) Bloß nichts anbrennen lassen

Im Alltag hat man eher selten mit Zündschnüren zu tun. In Knobelaufgaben sind sie trotzdem sehr beliebt, weil sie verzwickte Fragestellungen ermöglichen. Es folgen gleich zwei Rätsel dazu – ein eher leichtes und eines, das etwas mehr Hirnschmalz erfordert.

Beginnen wir mit der einfacheren Variante: Sie haben zwei Zündschnüre unterschiedlicher Länge. Beide brennen jeweils in exakt einer Minute ab. Können Sie damit die Zeit von 45 Sekunden bestimmen?

Hinweis: Sie dürfen die Schnüre nicht falten, um so die Mitte zu finden. Auch das Abmessen mit Lineal und das Anbringen von Markierungen sind nicht erlaubt.



Zweite Aufgabe: Sie haben eine Zündschnur, die eine Minute brennt. Kann man damit die Zeit von zehn Sekunden messen? Auch dabei dürfen Sie weder ein Lineal zu Hilfe nehmen noch die Schnur falten.

7) Klappt der Lauf durch die Wüste?

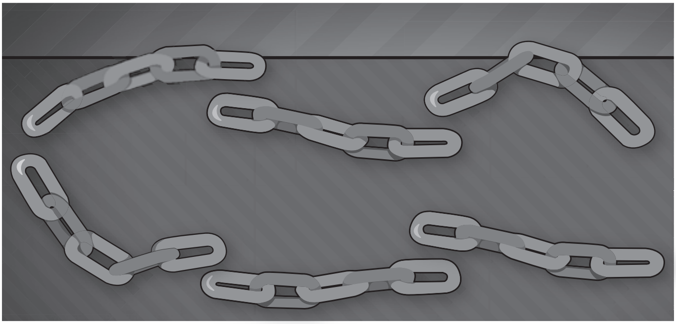
Waagen, Zündschnüre und Uhrzeiger sind hoffentlich abgehakt – jetzt geht es hinein in die Wüste. Gnadenlos brennt die Sonne, Schatten gibt es nirgends. Wer schon mal bei sengender Hitze durch Wüstensand gestapft ist, weiß, wie wichtig es ist, genug Wasser dabeizuhaben. Das ist auch der Hauptfigur dieses Rätsels bewusst.

Ein Sportler will in einem sechstägigen Lauf die Wüste durchqueren. An seinem Startpunkt gibt es reichlich zu essen und zu trinken. Der Mann kann aber nur Proviant für vier Tage tragen. Wie muss er vorgehen, damit die Wüstentour gelingt?

Hinweis: Wenn der Sportler mit vier Portionen Tagesproviant startet, hat er nach einem Tag nur noch drei Portionen, denn eine hat er dann ja bereits vertilgt. Der Mann darf Proviant in der Wüste deponieren.

8) Gelingt Ihnen die Ketten-Aktion?

Samuel Loyd liebte das Schachspiel und entwickelte Tausende kleiner Schachaufgaben für die Rätselspalten von Zeitungen. Wir verdanken dem Amerikaner, der von 1841 bis 1911 lebte, aber auch viele wunderschöne Knobeleien und mathematische Rätsel.



Von Loyd stammt auch das folgende Problem. Darin geht es um sechs Kettenstücke, die jeweils aus fünf Gliedern beste-

hen. Ein Bauer möchte die sechs Stücke zu einer geschlossenen Kette, bestehend aus 30 Gliedern, zusammenfügen.
Es kostet 25 Euro, ein Kettenglied aufzuschneiden und wieder zusammenzuschweißen. In einem Geschäft könnte der Bauer auch eine neue Kette aus 30 Gliedern kaufen – zum Preis von 140 Euro.
Wie viel Geld muss der Bauer ausgeben, wenn er möglichst günstig an eine geschlossene Kette kommen will, die aus 30 Gliedern besteht?

9) Koch langsam 3

Mit unterschiedlich großen Gläsern ein bestimmtes Volumen abmessen – auch das gehört zu den Rätselklassikern. Eine solche Aufgabe taucht sogar in der legendären Filmreihe »Stirb langsam« auf. Im dritten Teil des Blockbusters muss der von Bruce Willis gespielte Held John McClane ernsthaft rechnen. Er soll binnen fünf Minuten exakt vier Gallonen Wasser auf eine Waage stellen, ansonsten droht Ungemach.
Zur Verfügung stehen McClane und seinem Kompagnon Zeus (gespielt von Samuel L. Jackson) zwei verschiedene Plastikkanister, die drei beziehungsweise fünf Gallonen fassen. Die beiden sind zunächst ratlos – aber sie schaffen es schließlich tatsächlich, exakt vier Gallonen abzufüllen.

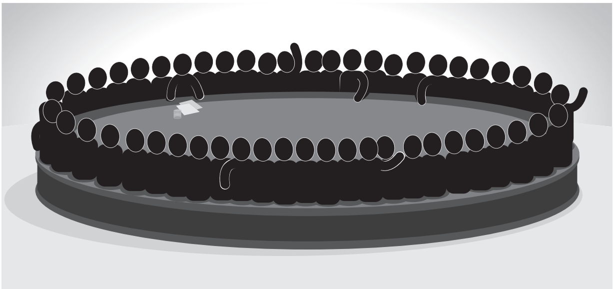
Unsere Aufgabe ist ganz ähnlich – nur dass Sie diese etwas entspannter angehen können: Sie möchten eine Soße zubereiten und benötigen dafür exakt 0,1 Liter Wasser. Leider fehlt in Ihrer Küche ein Messbecher. Zur Verfügung stehen nur zwei Gläser. Eines hat 0,3 – das andere 0,5 Liter Fassungsvermögen. Wasser gibt es zum Glück genug.

Kann die Soße trotzdem gelingen?

Zusatzfrage: Wie hat John McClane sich gerettet?

10) Schüchtern trifft extrovertiert

Wir verlassen die Küche, um zwei Klubs bei einer gemeinsamen Feier beizustehen. Jedes Jahr im Dezember veranstaltet der Klub der Schüchternen ein Festessen. Dazu lädt er traditionell Mitglieder des befreundeten Klubs der Extrovertierten ein. Ziel ist, dass sich alle Anwesenden im Umgang mit Menschen üben, die anders sind als sie selbst.
Das Festessen findet traditionell an einem großen runden Tisch statt, sodass jeder genau zwei Nachbarn hat. Wegen des starken Mitteilungsdrangs der Extrovertierten besteht für jeden Teilnehmer des Festessens, ganz besonders für die Schüchternen, die Gefahr, untergebuttert zu werden. Um das zu verhindern, darf kein Teilnehmer zwei Extrovertierte als Nachbarn haben, egal, ob er selbst schüchtern ist oder extrovertiert.

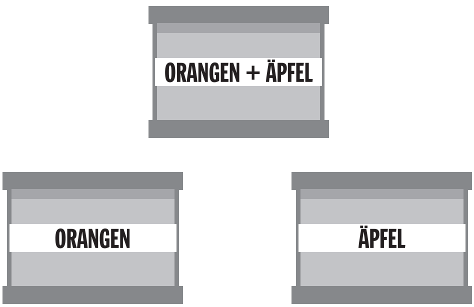


In diesem Jahr kommen von beiden Klubs jeweils 25 Mitglieder zum Festessen. Ein Schüchterner nimmt allen Mut zu-

sammen und meldet sich zu Wort: »Es ist unmöglich, alle 50 Teilnehmer so zu platzieren, dass niemand zwei extrovertierte Nachbarn hat.« Die Extrovertierten protestieren lautstark: »Natürlich geht das!«
Wer hat recht?

11) Wo sind die Äpfel, wo die Orangen?

Große Unternehmen überraschen manchen Bewerber mitunter auch mit Knobelaufgaben. Sie wollen so herausfinden, wie der potenzielle Mitarbeiter mit Problemen umgeht. Das folgende Rätsel soll aus einem Bewerbungsgespräch bei einem großen IT-Konzern in den USA stammen.
Darin geht es um »Apples and Oranges« – eine Redewendung, deren deutsche Entsprechung Äpfel und Birnen lautet. Ziel der Aufgabe ist allerdings nicht, Äpfel mit Orangen oder Birnen zu vergleichen, sondern darum, die Früchte zu finden.



Vor Ihnen stehen drei Kisten. In einer sind nur Äpfel, in einer nur Orangen und in der dritten Äpfel und Orangen. Es gibt

auch drei zugehörige Etiketten, allerdings wurden diese dummerweise vertauscht, sodass die Beschriftung aller drei Kisten falsch ist. Sie dürfen aus einer Kiste, ohne hineinzuschauen, eine einzige Frucht entnehmen.
Reicht das, um den Inhalt aller drei Kisten korrekt anzugeben? Wie müssen Sie dabei vorgehen?

12) Treffen sich zwei Mathematiker

Das folgende Problem gefällt mir besonders gut, weil man anfangs kaum glauben möchte, dass es überhaupt lösbar ist.

Sie sehen sich nur sehr selten – die beiden Mathematiker mit einer Vorliebe für Rätsel. Nur gelegentlich besuchen sie Fachkongresse – und das ist dann auch die einzige Gelegenheit, ihr Faible für Rätsel gemeinsam auszuleben. Bei ihrem letzten Aufeinandertreffen entwickelte sich folgender Dialog:
»Hast du nicht einen Sohn?«, fragt der erste Mathematiker.
»Ja, mittlerweile habe ich sogar noch zwei weitere«, lautet die Antwort. »Zum Glück keine Zwillinge.«
»Und wie alt sind die drei jetzt?«, fragt der Erste.
»Das Produkt der Jahre entspricht genau der aktuellen Monatszahl«, antwortet der Zweite.
»Hm, das reicht mir aber noch nicht.«
»Stimmt«, antwortet der dreifache Vater. »Wenn man in genau einem Jahr die Altersjahre addiert statt multipliziert, ergibt sich wieder genau die aktuelle Monatszahl.«
Wie alt sind die drei Söhne?

Hinweis: Wir gehen davon aus, dass sich die Geburtstage zweier Geschwister um mindestens ein Kalenderjahr unterscheiden, sofern sie weder Zwillinge noch Drillinge sind. Die Monatszahl vom Januar lautet 1, die vom Februar 2 und so weiter.

13) Vier Wanderer und eine wacklige Brücke

Sie kennen sicher das Problem des Bauern, der mit einem Boot auf die andere Seite des Flusses übersetzen will – zusammen mit einem Wolf, einem Schaf und einem Kohlkopf. Ins Boot passt nur der Bauer und eines der Tiere oder der Kohlkopf. Das Schaf würde sofort den Kohlkopf fressen und der Wolf das Schaf, sobald der Bauer nicht mehr da ist. Wie bringt der Bauer sich, die Tiere und den Kohl über den Fluss?

Das Wolf-Schaf-Kohl-Problem lässt sich vergleichsweise leicht lösen. Es gibt aber auch anspruchsvollere Varianten wie die folgende: Statt eines Flusses gilt es, eine tiefe Schlucht zu überqueren. Vier Wanderer müssen dringend auf die andere Seite, weil dort in genau 60 Minuten ihr Bus abfährt.
Dummerweise ist die Brücke schon etwas klapprig, außerdem ist es ringsum stockfinster. Höchstens zwei Personen können die Brücke zugleich betreten, die Wanderer haben zudem nur eine Taschenlampe dabei. Leider ist die Lampe zu

schwach, um den Weg über die lange Brücke vom Rand aus zu beleuchten. Man muss die Leuchte deshalb bei jeder Überquerung dabeihaben.
Das ist aber noch nicht alles: Die vier Männer sind auch noch unterschiedlich fit. Der erste schafft den Weg zur anderen Seite in fünf Minuten, der zweite benötigt schon zehn Minuten. Nummer drei braucht 20 Minuten, der vierte Wanderer sogar 25.
Schaffen es die vier, ihren Bus zu kriegen? Falls ja: wie?

14) Steine versenken im See

Die letzte Aufgabe im Kapitel mit den Klassikern führt uns in die Physik. Wenn Sie eine grobe Ahnung davon haben, wie Auftrieb funktioniert, sollte das Ganze nicht allzu schwer sein.

Stellen Sie sich vor, Sie rudern mit einem Boot auf einen kleinen See hinaus. Das Boot wirkt schwerfälliger als sonst und liegt offenbar auch tiefer im Wasser als üblich. An Ihrem üppigen Frühstück kann es kaum liegen – das erhöht Ihr Gewicht ja nur minimal.
Sie schauen sich in der kleinen Schaluppe um und entdecken unter der alten Plane am Boden mehrere große, schwere Steine. Daran liegt es also! Und weil Sie gerade mitten auf dem See sind, werfen Sie die Steine einfach über Bord. Diese sinken schnell zu Boden.

Nun die Frage: Was passiert nach dem Versenken der Steine mit dem Pegelstand des Sees. Steigt er? Bleibt er gleich? Oder sinkt er?