LEHRBUCH

Siegfried Bosch

Lineare Algebra

5. Auflage

Neu mit Aufgabentraining

Springer Spektrum

LEHRBUCH

Siegfried Bosch

Lineare Algebra

5. Auflage

Neu mit Aufgaben-training

Springer Spektrum

Springer-Lehrbuch

Siegfried Bosch

Lineare Algebra

5., überarbeitete und erweiterte Auflage

Springer Spektrum

Siegfried Bosch
Mathematisches Institut
Westfälische Wilhelms-Universität
Münster, Deutschland

ISSN 0937-7433
ISBN 978-3-642-55259-5 ISBN 978-3-642-55260-1 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-55260-1

Mathematics Subject Classification (2010): 15-01

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum
© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2001, 2003, 2006, 2008, 2014
Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.
www.springer-spektrum.de

Aus dem Vorwort zur ersten Auflage

Die Mathematik ist eine Wissenschaft, die sich heutzutage in einem äußerst vielfältigen und schillernden Gewand präsentiert. Daher stellt sich zwangsläufig die Frage, welche Bereiche für die ersten Schritte im Vordergrund stehen sollten, wenn man ein Studium der Mathematik aufnehmen möchte. Natürlich hat sich die Art der Ausbildung mit der Zeit gewandelt. In kontinuierlicher Weise sind grundlegende Einsichten, die im Rahmen der Erforschung aktueller Probleme zutage getreten sind, mit in die Lehre eingeflossen. Dabei geht es in der Mathematik keineswegs um komplizierte Details, sondern vielmehr um oftmals wiederkehrende tragende Grundmuster, die sich als wichtig erwiesen haben und die ihrerseits bereits auf elementarem Niveau an sinnvollen Beispielen studiert werden können. So hat es sich bewährt, die Mathematikausbildung an Universitäten mit je einer Einführung in die Analysis und die Lineare Algebra zu beginnen, meist in zwei getrennten Vorlesungen. Beide Gebiete ergänzen sich gegenseitig und beinhalten in idealer Weise eine Vielzahl interessanter mathematischer Grundmuster. Ja, man kann mit Recht sagen, dass die Methoden der Analysis und der Linearen Algebra grundlegend für so gut wie alle anderen Bereiche der Mathematik sind.

Der Text dieses Bandes repräsentiert das Pensum einer zwei-semestrigen Einführungsvorlesung zur Linearen Algebra, eine Vorlesung, die ich mehrfach an der Universität Münster gehalten habe. Die meisten Studierenden verfügen bereits über gewisse Vorkenntnisse zur Linearen Algebra, wenn sie sich für ein Mathematikstudium entscheiden, etwa was die Vektorrechnung oder das Lösen linearer Gleichungssysteme angeht. Sie sind dagegen aller Erfahrung nach weniger mit den allgemeinen Begriffsbildungen der Linearen Algebra vertraut, die diese Theorie so universell einsatzfähig machen. Man kann sicherlich sagen, dass diese abstrakte Seite der Linearen Algebra für viele Studierende neue und ungewohnte Schwierigkeiten aufwirft. Ich habe mich dafür entschieden, diese Schwierigkeiten nicht zu kaschieren, sondern ihre Überwindung gezielt in den Vordergrund zu stellen. Deshalb wird in diesem Text von Anfang an großer Wert auf eine klare und systematische, aber dennoch behutsame Entwicklung der in der Linearen Algebra üblichen theoretischen Begriffsbildungen gelegt. Ad-hoc-Lösungen, die bei späteren Überlegungen oder Verallgemeinerungen revidiert werden müssten, werden nach Möglichkeit vermieden. Erst wenn die theoretische Seite eines Themenkomplexes geklärt ist, erfolgt die Behandlung

der zugehörigen Rechenverfahren, unter Ausschöpfung des vollen Leistungsumfangs.

Nun ist allerdings eine Theorie wie die Lineare Algebra, die sich in beträchtlichem Maße von ihren ursprünglichen geometrischen Wurzeln entfernt hat, nur schwerlich zu verdauen, wenn nicht gleichzeitig erklärt wird, *warum* man in dieser oder jener Weise vorgeht, *was* die zugehörige Strategie ist, oder an *welche* Hauptanwendungsfälle man mit einer gewissen Definition denkt. Um solche Fragen abzudecken, wird in einer Vorlesung neben der rein stofflichen Seite in erheblichem Maße auch das zugehörige motivierende Umfeld erläutert. In Lehrbüchern ist diese Komponente oftmals nur in geringem Maße realisiert, da ansonsten ein permanenter Wechsel zwischen der logisch-stringenten mathematischen Vorgehensweise und mehr oder weniger heuristisch-anschaulichen Überlegungen erforderlich wäre, was natürlich für die Einheitlichkeit und Übersichtlichkeit der Darstellung nicht förderlich ist. In dem vorliegenden Text wird nun jedes Kapitel mit einer Reihe von "Vorbemerkungen" eingeleitet, deren Ziel es ist, das motivierende Umfeld des jeweiligen Kapitels zu beleuchten. Ausgehend vom momentanen Kenntnisstand eines Lesers werden die zu behandelnden Hauptfragestellungen einschließlich des zugehörigen geometrischen Hintergrunds (soweit gegeben) erläutert und darüber hinaus mögliche Lösungsansätze und Lösungsstrategien, die Art der erhaltenen Lösung, wie auch die hiermit verbundenen Schwierigkeiten diskutiert. Es wird empfohlen, die Vorbemerkungen während des Studiums eines Kapitels je nach Bedarf mehrfach zu konsultieren, um größtmöglichen Nutzen aus ihnen zu ziehen. Ausdrücklich möchte ich aber darauf hinweisen, dass es sich bei diesen Einführungen zu einem großen Teil um Plausibilitätsbetrachtungen handelt. Diese sind daher nicht mit der üblichen mathematischen Prägnanz abgefasst, und sie sind infolgedessen auch nicht Teil des eigentlichen Lehrstoffes.

Der stoffliche Umfang des Buches bietet nur wenig Besonderheiten. Es werden Vektorräume und ihre linearen Abbildungen, Matrizen und lineare Gleichungssysteme, Determinanten, Polynome, Eigenwert- und Normalformentheorie sowie euklidische und unitäre Vektorräume behandelt. Ein Abschnitt über äußere Produkte (mit einem Stern * gekennzeichnet), in dem als Anwendung der allgemeine Laplace'sche Entwicklungssatz für Determinanten bewiesen wird, ist optional. Die Herleitung der Normalformen für Endomorphismen von Vektorräumen erfolgt, der Gesamtstrategie des Buches folgend, im Rahmen von Moduln über Hauptidealringen, wobei solche Moduln allerdings erst zu Beginn von Abschnitt 6.3 eingeführt werden. Wer sich hier auf die elementare Seite der Normalformentheorie beschränken möchte, kann im Anschluss an die Abschnitte 6.1 (Eigenwerte und Eigenvektoren) und 6.2 (Minimalpolynom und charakteristisches Polynom) auch gleich zu den euklidischen und unitären Vektorräumen in Kapitel 7 übergehen.

Münster, im Mai 2001 Siegfried Bosch

Vorwort zur fünften Auflage

In den vergangenen Jahren habe ich eine Vielzahl an Kommentaren und Anregungen zu meiner Linearen Algebra erhalten. Reinhard Diestel in Hamburg hat beispielsweise den Text im Rahmen seiner eigenen Vorlesung über Lineare Algebra kritisch angeschaut und mir eine längere Liste mit Änderungsvorschlägen zukommen lassen. Einige Druckfehler, die sich bei bisherigen Korrekturgängen stets als resistent erwiesen hatten, wurden von Moritz Schmitt benannt. Herzlichen Dank Ihnen allen für Ihre Rückmeldungen!

Ich habe all dies zum Anlass genommen, den Text für die vorliegende Neuauflage einer gründlichen Überarbeitung zu unterziehen, ohne jedoch den stofflichen Umfang zu ändern. Der Text liefert also nach wie vor eine detaillierte Einführung in die Lineare Algebra, die sich an den Anforderungen einer zweisemestrigen Einführungsvorlesung orientiert. Hinzugekommen ist hingegen ein neu entwickeltes Aufgabentraining, das zum selbständigen Bearbeiten von Aufgabenproblemen anleiten soll. Hier geht es zunächst um eine allgemeine Diskussion gewisser Grundsätze und Strategien zum Lösen von Übungsaufgaben. Sodann werden für jeden Abschnitt die kompletten Lösungen einiger ausgewählter Probleme exemplarisch erarbeitet. Ich hoffe, dass dieses Konzept, das wesentlich über die Präsentation so genannter *Musterlösungen* hinausgeht, auf Interesse stößt und beim Lösen der Aufgaben hilfreich sein wird!

Münster, im Mai 2014 Siegfried Bosch

Inhalt

1 Vektorräume 1
1.1 Mengen und Abbildungen 9
1.2 Gruppen 13
1.3 Körper 17
1.4 Vektorräume 26
1.5 Linear unabhängige Systeme und Basen von Vektorräumen . . . 32
1.6 Direkte Summen 44

2 Lineare Abbildungen 51
2.1 Grundbegriffe 57
2.2 Quotientenvektorräume 65
2.3 Der Dualraum 75

3 Matrizen 83
3.1 Lineare Abbildungen und Matrizen 88
3.2 Das Gauß'sche Eliminationsverfahren und der Rang einer Matrix 97
3.3 Matrizenringe und invertierbare Matrizen 107
3.4 Basiswechsel 114
3.5 Lineare Gleichungssysteme 117

4 Determinanten 129
4.1 Permutationen 132
4.2 Determinantenfunktionen 137
4.3 Determinanten von Matrizen und Endomorphismen 141
4.4 Die Cramer'sche Regel 149
4.5 Äußere Produkte* 153

5 Polynome 163
5.1 Ringe 164
5.2 Teilbarkeit in Integritätsringen 175
5.3 Nullstellen von Polynomen 183

6 Normalformentheorie 187
6.1 Eigenwerte und Eigenvektoren 190
6.2 Minimalpolynom und charakteristisches Polynom 196

6.3 Der Elementarteilersatz 204
6.4 Endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen 217
6.5 Allgemeine und Jordan'sche Normalform für Matrizen 223

7 Euklidische und unitäre Vektorräume 241
7.1 Sesquilinearformen 244
7.2 Orthogonalität 249
7.3 Sesquilinearformen und Matrizen 256
7.4 Die adjungierte Abbildung 262
7.5 Isometrien, orthogonale und unitäre Matrizen 267
7.6 Selbstadjungierte Abbildungen 278

Anhang: Aufgabentraining 285
Allgemeines 285
Diskussion der Lösungen 287
zu 1.1 – 1.6 Vektorräume 287
zu 2.1 – 2.3 Lineare Abbildungen 303
zu 3.1 – 3.5 Matrizen 314
zu 4.1 – 4.5 Determinanten 331
zu 5.1 – 5.3 Polynome 340
zu 6.1 – 6.5 Normalformentheorie 347
zu 7.1 – 7.6 Euklidische und unitäre Vektorräume 360

Symbolverzeichnis 373

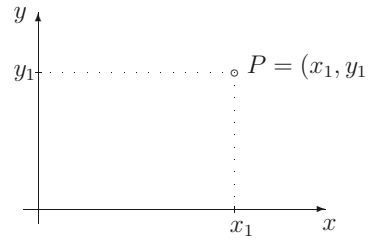
Namen- und Sachverzeichnis 379

1. Vektorräume

Vorbemerkungen

Konkrete geometrische Fragestellungen in der Ebene oder im drei-dimensionalen Raum waren vielfach Ausgangspunkt bedeutender mathematischer Entwicklungen. Als Hilfsmittel zur Behandlung solcher Fragen wurden beispielsweise geometrische Konstruktionsverfahren mittels Zirkel und Lineal entwickelt. Eine andere Strategie besteht darin, geometrische Fragen in rechnerische Probleme umzusetzen, um durch "Ausrechnen" zu Lösungen zu gelangen. Dies ist das Vorgehen der *analytischen Geometrie*, die 1637 von René Descartes in seinem berühmten Werk "La Géométrie" begründet wurde. Ein Großteil der rechnerischen Methoden der analytischen Geometrie wiederum wird heute in erweiterter Form unter dem Begriff der *Linearen Algebra* zusammengefasst.

Wir wollen im Folgenden etwas näher auf die grundlegenden Ideen des Descartes'schen Ansatzes eingehen. Hierzu betrachten wir eine Ebene E (etwa in dem uns umgebenden drei-dimensionalen Raum), zeichnen einen Punkt von E als so genannten Nullpunkt 0 aus und wählen dann ein Koordinatensystem mit Koordinatenachsen x und y, die sich im Nullpunkt 0 schneiden. Identifizieren wir die Achsen x und y jeweils noch mit der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, so lassen sich die Punkte P von E als Paare reeller Zahlen interpretieren:



In der Tat, ist P ein Punkt in E, so konstruiere man die Parallele zu y durch P. Diese schneidet die Achse x in einem Punkt x_1. Entsprechend schneidet die Parallele zu x durch P die Achse y in einem Punkt y_1, so dass man aus P das Koordinatenpaar (x_1, y_1) erhält. Umgekehrt lässt sich P aus dem Paar (x_1, y_1) in einfacher Weise zurückgewinnen, und zwar als Schnittpunkt der Parallelen zu y durch x_1 und der Parallelen zu x durch y_1. Genauer stellt man fest, dass die Zuordnung $P \longmapsto (x_1, y_1)$ eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen

S. Bosch, *Lineare Algebra,* DOI 10.1007/978-3-642-55260-1_1,
© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2014

den Punkten von E und den Paaren reeller Zahlen darstellt und man deshalb wie behauptet eine Identifizierung

$$E = \mathbb{R}^2 = \text{ Menge aller Paare reeller Zahlen}$$

vornehmen kann. Natürlich hängt diese Identifizierung von der Wahl des Nullpunktes 0 sowie der Koordinatenachsen x und y ab. Wir haben in obiger Abbildung ein rechtwinkliges Koordinatensystem angedeutet. Im Prinzip brauchen wir jedoch an dieser Stelle noch nichts über Winkel zu wissen. Es genügt, wenn wir als Koordinatenachsen zwei verschiedene Geraden x und y durch den Nullpunkt 0 verwenden. Genaueres hierzu werden wir noch in den Vorbemerkungen zu Kapitel 2 besprechen.

Es soll nun auch die Identifizierung der beiden Koordinatenachsen x und y mit der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen noch etwas genauer beleuchtet werden. Durch Festlegen des Nullpunktes ist auf x und y jeweils die Streckungsabbildung mit Zentrum 0 und einer reellen Zahl als Streckungsfaktor definiert. Wählen wir etwa einen von 0 verschiedenen Punkt $1_x \in x$ aus und bezeichnen mit $\alpha \cdot 1_x$ das Bild von 1_x unter der Streckung mit Faktor α, so besteht x gerade aus allen Punkten $\alpha \cdot 1_x$, wobei α die reellen Zahlen durchläuft. Genauer können wir sagen, dass die Zuordnung $\alpha \longmapsto \alpha \cdot 1_x$ eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den reellen Zahlen und den Punkten von x erklärt. Nach Auswahl je eines von 0 verschiedenen Punktes $1_x \in x$ und entsprechend $1_y \in y$ sind daher x und y auf natürliche Weise mit der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen zu identifizieren, wobei die Punkte $0, 1_x \in x$ bzw. $0, 1_y \in y$ den reellen Zahlen 0 und 1 entsprechen. Die Möglichkeit der freien Auswahl der Punkte $1_x \in x$ und $1_y \in y$ wie auch die Verwendung nicht notwendig rechtwinkliger Koordinatensysteme machen allerdings auf ein Problem aufmerksam: Der Abstand von Punkten in E wird unter der Identifizierung $E = \mathbb{R}^2$ nicht notwendig dem auf $\mathbb{R}^2$ üblichen euklidischen Abstand entsprechen, der für Punkte $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ durch

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

gegeben ist. Eine korrekte Reflektierung von Abständen auf E ist jedoch mit Hilfe der später noch zu diskutierenden *Skalarprodukte* möglich.

In der Mathematik ist man stets darum bestrebt, bei der Analyse von Phänomenen und Problemen, für die man sich interessiert, zu gewissen "einfachen Grundstrukturen" zu gelangen, die für das Bild, das sich dem Betrachter bietet, verantwortlich sind. Solchermaßen als wichtig erkannte Grundstrukturen untersucht man dann oftmals losgelöst von der eigentlichen Problematik, um herauszufinden, welche Auswirkungen diese haben; man spricht von einem *Modell*, das man untersucht. Modelle haben den Vorteil, dass sie in der Regel leichter zu überschauen sind, aber manchmal auch den Nachteil, dass sie den eigentlich zu untersuchenden Sachverhalt möglicherweise nur in Teilaspekten beschreiben können.

In unserem Falle liefert der Descartes'sche Ansatz die Erkenntnis, dass Punkte von Geraden, Ebenen oder des drei-dimensionalen Raums mittels Koordinaten zu beschreiben sind. Hierauf gestützt können wir, wie wir gesehen

haben, die Menge $\mathbb{R}^2$ aller Paare reeller Zahlen als Modell einer Ebene ansehen. Entsprechend bildet die Menge $\mathbb{R}^3$ aller Tripel reeller Zahlen ein Modell des drei-dimensionalen Raums, sowie natürlich $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ ein Modell einer Geraden. Die Untersuchung solcher Modelle führt uns zum zentralen Thema dieses Kapitels, nämlich zu den *Vektorräumen*. Vektorräume beinhalten als fundamentale Struktur zwei Rechenoperationen, zum einen die Multiplikation von Skalaren (in unserem Falle reellen Zahlen) mit Vektoren, was man sich als einen Streckungsprozess vorstellen kann, und zum anderen die Addition von Vektoren. Wir wollen dies mit den zugehörigen geometrischen Konsequenzen einmal am Beispiel einer Ebene E und ihrem Modell $\mathbb{R}^2$ erläutern.

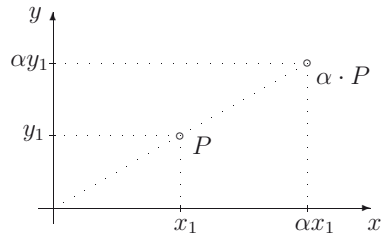
Wir beginnen mit der skalaren Multiplikation. Für

$$\alpha \in \mathbb{R}, \qquad P = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$$

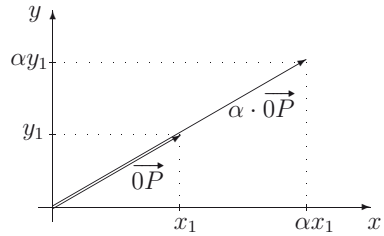
bezeichnet man mit

$$\alpha \cdot P = \alpha \cdot (x_1, y_1) := (\alpha x_1, \alpha y_1)$$

das Produkt von α und P, wobei sich in E folgendes Bild ergibt:



Die Multiplikation von Punkten $P \in E$ mit einem Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ ist folglich zu interpretieren als Streckungsabbildung mit Streckungszentrum 0 und Streckungsfaktor α. Besonders instruktiv lässt sich dies beschreiben, wenn man die Punkte $P \in E$ als "Vektoren" im Sinne gerichteter Strecken $\overrightarrow{0P}$ auffasst. Vektoren sind somit charakterisiert durch ihre Länge und ihre Richtung (außer für den Nullvektor $\overrightarrow{00}$, der keine bestimmte Richtung besitzt). Der Vektor $\alpha \cdot \overrightarrow{0P}$ geht dann aus $\overrightarrow{0P}$ hervor, indem man ihn mit α streckt, d. h. seine Länge mit α (oder, besser, mit dem Betrag $|\alpha|$) multipliziert und ansonsten die Richtung des Vektors beibehält bzw. invertiert, je nachdem ob $\alpha \geq 0$ oder $\alpha < 0$ gilt:



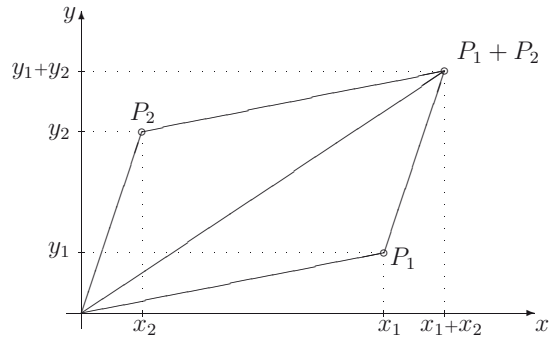
Als weitere Rechenoperation betrachten wir die Addition von Punkten in $\mathbb{R}^2$. Für

$$P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

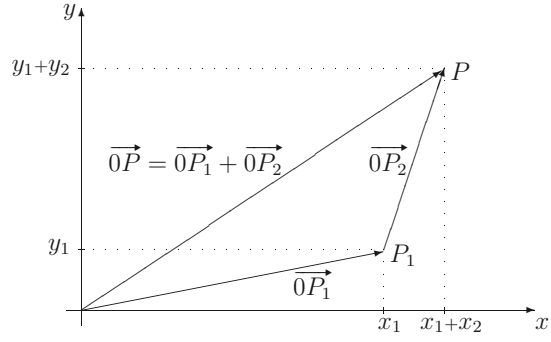
setzt man

$$P_1 + P_2 := (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

was in E mittels folgender Skizze verdeutlicht werden möge:



Auch die Beschreibung der Addition in E gestaltet sich instruktiver, wenn man den Vektorstandpunkt im Sinne gerichteter Strecken zugrunde legt. Allerdings sollte man dabei zulassen, dass Vektoren als gerichtete Strecken parallel zu sich selbst verschoben und somit vom Koordinatenursprung als ihrem natürlichen Fußpunkt gelöst werden können. Die Summe der Vektoren $\overrightarrow{0P_1}$ und $\overrightarrow{0P_2}$ ergibt sich dann als Vektor $\overrightarrow{0P}$, wobei P derjenige Endpunkt ist, den man erhält, indem man beide Vektoren miteinander kombiniert, also den Vektor $\overrightarrow{0P_1}$ in 0 anlegt und den Vektor $\overrightarrow{0P_2}$ im Endpunkt P_1 von $\overrightarrow{0P_1}$, etwa wie folgt:



Dabei zeigt die obige Parallelogrammkonstruktion, dass sich das Ergebnis der Addition nicht ändert, wenn man alternativ den Vektor $\overrightarrow{0P_2}$ in 0 anlegt und anschließend den Vektor $\overrightarrow{0P_1}$ im Endpunkt von $\overrightarrow{0P_2}$. Die Addition von Vektoren hängt daher nicht von der Reihenfolge der Summanden ab, sie ist *kommutativ*.

Es mag etwas verwirrend wirken, wenn wir die Elemente des $\mathbb{R}^2$ einerseits als Punkte, sowie andererseits auch als (verschiebbare) Vektoren im Sinne gerichteter Strecken interpretieren. Im Prinzip könnte man eine begriffliche Trennung zwischen Punkten und Vektoren vornehmen, indem man den einem Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ zugeordneten Vektor $\overrightarrow{0P}$ als *Translation* $Q \longmapsto P + Q$ interpretiert, d. h. als Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$, die einem Element $Q \in \mathbb{R}^2$ das Element $P+Q$ als Bild zuordnet. Wir wollen von dieser Möglichkeit allerdings keinen Gebrauch machen, da eine Trennung der Begriffe für unsere Zwecke keine Vorteile bringt und die Dinge lediglich komplizieren würde.

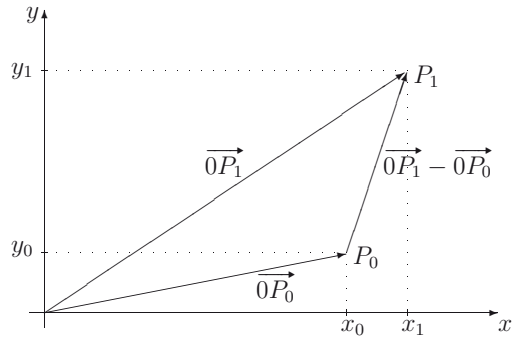
Als Nächstes wollen wir besprechen, dass die Addition von Punkten und Vektoren in $\mathbb{R}^2$ bzw. E auf natürliche Weise auch eine Subtraktion nach sich zieht. Für $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ setzt man

$$-P_0 = -(x_0, y_0) := (-1) \cdot (x_0, y_0) = (-x_0, -y_0)$$

und nennt dies das negative oder inverse Element zu P_0. Dieses ist in eindeutiger Weise charakterisiert als Element $Q \in \mathbb{R}^2$, welches der Gleichung $P_0 + Q = 0$ genügt. Die Subtraktion zweier Elemente $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_0 = (x_0, y_0)$ in $\mathbb{R}^2$ wird dann in nahe liegender Weise auf die Addition zurückgeführt, und zwar durch

$$P_1 - P_0 := P_1 + (-P_0) = (x_1 - x_0, y_1 - y_0).$$

Legen wir wieder den Vektorstandpunkt in E zugrunde, so entsteht also $-\overrightarrow{0P_0}$ aus dem Vektor $\overrightarrow{0P_0}$ durch Invertieren seiner Richtung, wobei die Länge erhalten bleibt. Damit lässt sich die Differenz zweier Vektoren $\overrightarrow{0P_1}$ und $\overrightarrow{0P_0}$ wie folgt illustrieren:



Insbesondere erkennt man, dass die Summe der Vektoren $\overrightarrow{0P_0}$ und $\overrightarrow{0P_1} - \overrightarrow{0P_0}$ gerade den Vektor $\overrightarrow{0P_1}$ ergibt, was eine sinnvoll definierte Addition bzw. Subtraktion natürlich ohnehin leisten sollte. Allgemeiner kann man Summen des Typs

$$\overrightarrow{0P} \;=\; \overrightarrow{0P_0} + \;\alpha \cdot (\overrightarrow{0P_1} - \overrightarrow{0P_0})$$

mit unterschiedlichen Skalaren $\alpha \in \mathbb{R}$ bilden. Der Punkt P liegt dann für $P_0 \neq P_1$ stets auf der Geraden G, die durch P_0 und P_1 festgelegt ist, und zwar durchläuft P ganz G, wenn α ganz $\mathbb{R}$ durchläuft: