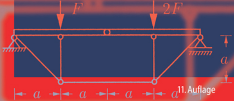
Gross · Ehlers · Wriggers
Schröder · Müller

Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik 1

Jetzt durchgehend vierfarbig

Statik



11. Auflage

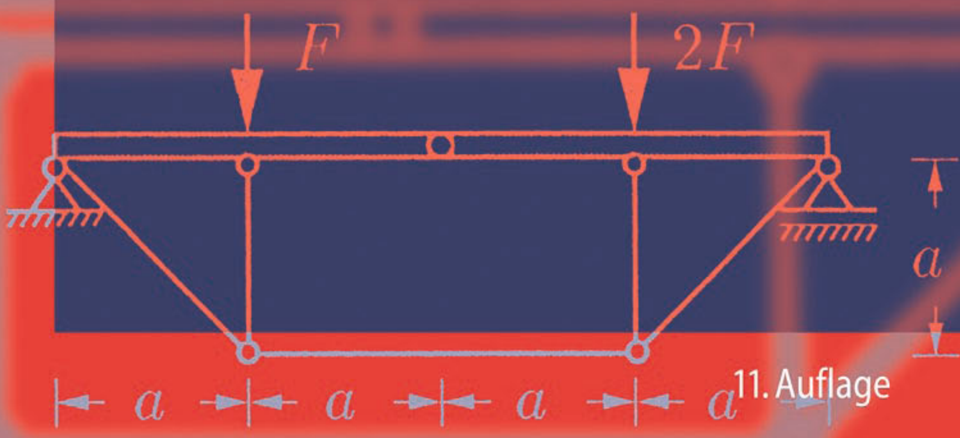
Springer Vieweg

Gross · Ehlers · Wriggers
Schröder · Müller

Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik 1

Jetzt durchgehend vierfarbig

Statik



11. Auflage

Springer Vieweg

Springer-Lehrbuch

Prof. Dr.-Ing. Dietmar Gross
studierte Angewandte Mechanik und promovierte an der Universität Rostock. Er habilitierte an der Universität Stuttgart und ist seit 1976 Professor für Mechanik an der TU Darmstadt. Seine Arbeitsgebiete sind unter anderem die Festkörper- und Strukturmechanik sowie die Bruchmechanik. Hierbei ist er auch mit der Modellierung mikromechanischer Prozesse befasst. Er ist Mitherausgeber mehrerer internationaler Fachzeitschriften sowie Autor zahlreicher Lehr- und Fachbücher.

Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Ehlers
studierte Bauingenieurwesen an der Universität Hannover, promovierte und habilitierte an der Universität Essen und war 1991 bis 1995 Professor für Mechanik an der TU Darmstadt. Seit 1995 ist er Professor für Technische Mechanik an der Universität Stuttgart. Seine Arbeitsgebiete umfassen die Kontinuumsmechanik, die Materialtheorie, die Experimentelle und die Numerische Mechanik. Dabei ist er insbesondere an der Modellierung mehrphasiger Materialen bei Anwendungen im Bereich der Geomechanik und der Biomechanik interessiert.

Prof. Dr.-Ing. Peter Wriggers
studierte Bauingenieur- und Vermessungswesen, promovierte 1980 an der Universität Hannover und habilitierte 1986 im Fach Mechanik. Er war Gastprofessor an der UC Berkeley, USA und Professor für Mechanik an der TH Darmstadt. Ab 1998 war er Professor für Baumechanik und Numerische Mechanik an der Universität Hannover, und er ist seit 2008 Professor für Kontinuumsmechanik in der dortigen Fakultät für Maschinenbau. Seit 2008 steht er der German Association for Computational Mechanics (GACM) als Präsident vor und ist seit 2010 Vizepräsident der IACM.

Prof. Dr.-Ing. Jörg Schröder
studierte Bauingenieurwesen, promovierte an der Universität Hannover und habilitierte an der Universität Stuttgart. Nach einer Professur für Mechanik an der TU Darmstadt ist er seit 2001 Professor für Mechanik an der Universität Duisburg-Essen. Seine Arbeitsgebiete sind unter anderem die theoretische und die computerorientierte Kontinuumsmechanik sowie die phänomenologische Materialtheorie mit Schwerpunkten auf der Formulierung anisotroper Materialgleichungen und der Weiterentwicklung der Finite-Elemente-Methode.

Prof. Dr.-Ing. Ralf Müller
studierte Maschinenbau und Mechanik an der TU Darmstadt und promovierte dort 2001. Nach einer Juniorprofessur mit Habilitation im Jahr 2005 an der TU Darmstadt leitet er seit 2009 den Lehrstuhl für Technische Mechanik im Fachbereich Maschinenbau und Verfahrenstechnik der TU Kaiserslautern. Seine Arbeitsgebiete sind unter anderem mehrskalige Materialmodellierung, gekoppelte Mehrfeldprobleme, Defekt- und Mikromechanik. Er beschäftigt sich im Rahmen numerischer Verfahren mit Randelemente- und Finite-Elemente-Methoden.

Dietmar Gross · Wolfgang Ehlers
Peter Wriggers · Jörg Schröder · Ralf Müller

Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik 1

Statik

11., ergänzte und vollständig überarbeitete Auflage

Springer Vieweg

Prof. Dr.-Ing. Dietmar Gross
Technische Universität Darmstadt
Festkörpermechanik
Petersenstr. 13
64287 Darmstadt
Deutschland
gross@mechanik.tu-darmstadt.de

Prof. Dr.-Ing. Jörg Schröder
Universität Duisburg-Essen
Institut für Mechanik
Universitätsstr. 15
45141 Essen
Deutschland
j.schroeder@uni-due.de

Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Ehlers
Universität Stuttgart
Institut für Mechanik
Lehrstuhl II
Pfaffenwaldring 7
70569 Stuttgart
Deutschland
ehlers@mechbau.uni-stuttgart.de

Prof. Dr.-Ing. Ralf Müller
TU Kaiserslautern
Lehrstuhl für Technische Mechanik
Gottlieb-Daimler-Straße
67663 Kaiserslautern
Deutschland
ram@rhrk.uni-kl.de

Prof. Dr.-Ing. Peter Wriggers
Leibniz Universität Hannover
Institut für Kontinuumsmechanik
Appelstraße 11
30167 Hannover
Deutschland
wriggers@ikm.uni-hannover.de

ISSN 0937-7433
ISBN 978-3-642-37164-6
ISBN 978-3-642-37165-3 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-37165-3

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Vieweg

Einbandentwurf: WMXDesign GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Vieweg ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.
www.springer-vieweg.de

Vorwort

Diese Aufgabensammlung soll dem Wunsch der Studierenden nach Hilfsmitteln zur Erleichterung des Studiums und zur Vorbereitung auf die Prüfung Rechnung tragen.

Entsprechend den meist üblichen dreisemestrigen Grundkursen in Technischer Mechanik an Universitäten und Hochschulen besteht die Sammlung aus drei Bänden. Der erste Band (Statik) umfasst das Stoffgebiet des ersten Semesters. Dabei haben wir bei allen Aufgaben das Finden des Lösungswegs und die Aufstellung der Grundgleichungen der numerischen Ausrechnung übergeordnet.

Erfahrungsgemäß bereitet die Technische Mechanik gerade dem Anfänger oft große Schwierigkeiten. In diesem Fach soll er exemplarisch lernen, ein technisches Problem auf ein mathematisches Modell abzubilden, dieses mit mathematischen Methoden zu analysieren und das Ergebnis in Hinblick auf die ingenieurwissenschaftliche Anwendung auszuwerten. Der Weg zu diesem Ziel kann erfahrungsgemäß nur über die selbständige Bearbeitung von Aufgaben führen. Wir warnen deshalb dringend vor der Illusion, dass ein reines Nachlesen der Lösungen zum Verständnis der Mechanik führt. Sinnvoll wird diese Sammlung nur dann genutzt, wenn der Studierende zunächst eine Aufgabe allein zu lösen versucht und nur beim Scheitern auf den angegebenen Lösungsweg schaut.

Selbstverständlich kann diese Sammlung kein Lehrbuch ersetzen. Wem die Begründung einer Formel oder eines Verfahrens nicht geläufig ist, der muss auf sein Vorlesungsmanuskript oder auf die vielfältig angebotene Literatur zurückgreifen. Eine kleine Auswahl ist auf Seite IX angegeben.

An der Aufgabensammlung war bis zur 5. Auflage unser verstorbener Kollege Prof. Dr. Dr. h.c. Walter Schnell als Autor beteiligt. Seit der 10. Auflage sind die Professoren Schröder und Müller Teil des Autorenteams. Die freundliche Aufnahme, welche dieses Buch gefunden hat, macht eine Neuauflage erforderlich. Wir haben sie genutzt, um eine Reihe von Verbesserungen vorzunehmen und insbesondere alle Bilder farbig neu zu gestalten.

Wir danken dem Springer-Verlag, in dem auch die teilweise von uns mitverfassten Lehrbücher zur Technischen Mechanik erschienen sind, für die gute Zusammenarbeit und die ansprechende Ausstattung des Buchs. Auch dieser Auflage wünschen wir eine freundliche Aufnahme bei der interessierten Leserschaft.

Darmstadt, Stuttgart, Hannover,
Essen und Kaiserslautern, im Sommer 2013

D. Gross
W. Ehlers
P. Wriggers
J. Schröder
R. Müller

Inhaltsverzeichnis

Literaturhinweise

Lehrbücher

Gross, D., Hauger, W., Schröder, J., Wall, W. Technische Mechanik, Band 1: Statik, 12. Auflage. Springer-Verlag, Berlin 2013

Hagedorn, P., Technische Mechanik, Band 1: Statik, 5. Auflage. Harri Deutsch, Frankfurt 2008

Balke, H., Einführung in die Technische Mechanik, Statik, Springer-Verlag, Berlin 2010

Müller, W. H., Ferber, F., Technische Mechanik für Ingenieure, Hanser Fachbuch, Leipzig 2011

Richard, H. A., Sander, M., Technische Mechanik, Statik, Vieweg & Teubner, Wiesbaden 2012

Hibbeler, R.C., Technische Mechanik 1, Statik, Pearson Studium 2012

Magnus, K., Müller, H. H., Grundlagen der Technischen Mechanik, Teubner, Stuttgart 2005

Wriggers, P., Nackenhorst, U., et al., Technische Mechanik kompakt, Teubner, Wiesbaden 2006

Gross, D., Hauger, W., Schröder, J., Wall, Rajapakse, N., Engineering Mechanics 1, Statics, Springer-Verlag, Berlin 2012

Hibbeler, R. C., Engineering Mechanics, Statics, Prentice Hall, 2012

Aufgabensammlungen

Hauger, W., Mannl, V., Wall, W., Werner, E., Aufgaben zu Technische Mechanik 1-3. Springer-Verlag, Berlin 2011

Müller, W. H., Ferber, F., Übungsaufgaben zur Technische Mechanik, Hanser Fachbuch, Leipzig 2009

Hagedorn, P., Aufgabensammlung Technische Mechanik, 2. Auflage. Teubner, Stuttgart 1992

Dankert, H, Dankert, J., Technische Mechanik, 7. Auflage. Springer Vieweg, Wiesbaden 2013

Bezeichnungen

Bei den Lösungen der Aufgaben wurden folgende Symbole verwendet:

$\uparrow$: Abkürzung für *Summe aller Kräfte in Pfeilrichtung gleich Null.*

$\overset{\curvearrowleft}{A}$: Abkürzung für *Summe aller Momente um den Bezugspunkt A (mit vorgegebener Drehrichtung) gleich Null.*

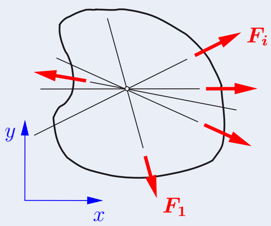
$\leadsto$ Abkürzung für *hieraus folgt.*

Kapitel 1

Gleichgewicht

1

Zentrale Kräftegruppen in der Ebene



Eine zentrale Kräftegruppe kann durch die *Resultierende*

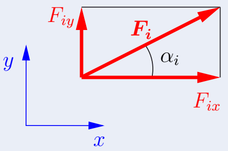
$$\boldsymbol{R} = \sum \boldsymbol{F_i}$$

ersetzt werden. Es herrscht *Gleichgewicht*, wenn

$$\sum \boldsymbol{F_i} = \boldsymbol{0}$$

oder in Komponenten

$$\sum F_{ix} = 0\,, \qquad \sum F_{iy} = 0\,.$$



Darin sind

$$\boldsymbol{F_i} = F_{ix}\boldsymbol{e}_x + F_{iy}\boldsymbol{e}_y\,,$$

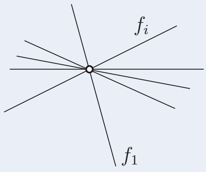
$$F_{ix} = F_i \cos\alpha_i\,,$$

$$F_{iy} = F_i \sin\alpha_i\,,$$

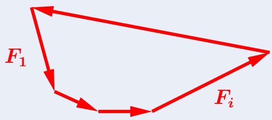
$$|\boldsymbol{F}_i| = F_i = \sqrt{F_{ix}^2 + F_{iy}^2}\,.$$

Bei der *grafischen Lösung* verlangt die Gleichgewichtsbedingung, dass das Krafteck „geschlossen“ist.

Lageplan



Kräfteplan = Krafteck

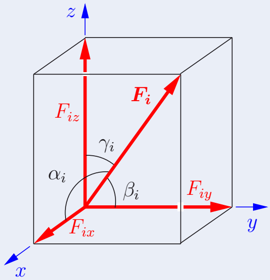


Zentrale Kräftegruppen im Raum

Gleichgewicht herrscht, wenn die Resultierende $\boldsymbol{R} = \sum \boldsymbol{F_i}$ verschwindet, d.h. wenn $\sum \boldsymbol{F_i} = \boldsymbol{0}$ oder in Komponenten

$$\sum F_{ix} = 0\,, \quad \sum F_{iy} = 0\,, \quad \sum F_{iz} = 0\,.$$

D. Gross et al., *Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik 1*,
DOI 10.1007/978-3-642-37165-3_1, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013



Darin sind

$$\boldsymbol{F_i} = F_{ix}\boldsymbol{e}_x + F_{iy}\boldsymbol{e}_y + F_{iz}\boldsymbol{e}_z \ ,$$

$$F_{ix} = F_i \cos\alpha_i \ ,$$

$$F_{iy} = F_i \cos\beta_i \ ,$$

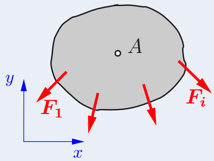
$$F_{iz} = F_i \cos\gamma_i \ ,$$

$$\cos^2\alpha_i + \cos^2\beta_i + \cos^2\gamma_i = 1 \ ,$$

$$|\boldsymbol{F}_i| = F_i = \sqrt{F_{ix}^2 + F_{iy}^2 + F_{iz}^2} \ .$$

Allgemeine Kräftegruppen in der Ebene

Die Kräftegruppe lässt sich ersetzen durch die Resultierende $\boldsymbol{R} = \sum \boldsymbol{F_i}$ und ein resultierendes Moment $M_R^{(A)}$ um einen beliebig gewählten Bezugspunkt A. Es herrscht Gleichgewicht, wenn

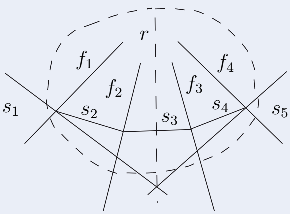


$$\sum F_{ix} = 0\,, \qquad \sum F_{iy} = 0\,, \qquad \sum M_i^{(A)} = 0\,.$$

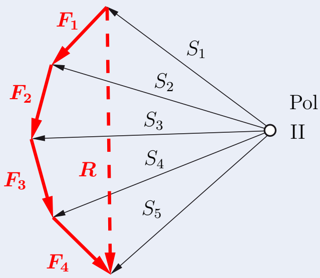
Anstelle der beiden Kräftegleichgewichtsbedingungen können zwei weitere Momentenbedingungen um andere Bezugspunkte (z.B. B und C) verwendet werden. Dabei dürfen A, B und C *nicht* auf *einer* Geraden liegen.

Grafisch erhält man die Resultierende mit Hilfe des Seilecks und des Kraftecks.

Seileck im Lageplan



Krafteck



- Die Seilstrahlen s_i sind parallel zu den Polstrahlen S_i im Krafteck.
- Die Wirkungslinie r der Resultierenden $\boldsymbol{R}$ (Größe und Richtung folgt aus dem Krafteck) verläuft im Seileck durch den Schnittpunkt der äußeren Seilstrahlen s_1 und s_5.
- Damit Gleichgewicht herrscht, müssen Seileck und Krafteck „geschlossen" sein.

Allgemeine Kräftegruppen im Raum

Es herrscht *Gleichgewicht*, wenn die Resultierende

$$\boldsymbol{R} = \sum \boldsymbol{F_i}$$

und das resultierende Moment

$$\boldsymbol{M_R^{(A)}} = \sum \boldsymbol{r_i} \times \boldsymbol{F_i}$$

um einen beliebigen Bezugspunkt A verschwinden:

$$\sum \boldsymbol{F_i} = \boldsymbol{0}\,, \qquad \sum \boldsymbol{M_i^{(A)}} = \boldsymbol{0}$$

oder in Komponenten

$$\begin{aligned} &\sum F_{ix} = 0\,, && \sum F_{iy} = 0\,, && \sum F_{iz} = 0\,, \\ &\sum M_{ix}^{(A)} = 0\,, && \sum M_{iy}^{(A)} = 0\,, && \sum M_{iz}^{(A)} = 0 \end{aligned}$$

mit

$$M_{ix}^{(A)} = y_i F_{iz} - z_i F_{iy}\,, \quad M_{iy}^{(A)} = z_i F_{ix} - x_i F_{iz}\,, \quad M_{iz}^{(A)} = x_i F_{iy} - y_i F_{ix}\,.$$

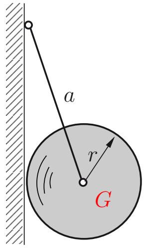
Darin sind x_i, y_i und z_i die Komponenten des Ortsvektors $\boldsymbol{r_i}$ vom Bezugspunkt A zu einem beliebigen Punkt auf der Wirkungslinie der Kraft $\boldsymbol{F_i}$ (z.B. zum Angriffspunkt).

Anmerkung: Wie im ebenen Fall können die Kräftegleichgewichtsbedingungen durch zusätzliche Momentengleichgewichtsbedingungen um geeignete Achsen ersetzt werden.

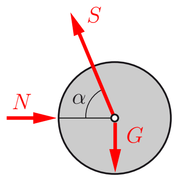
Aufgabe 1.1 Eine Kugel vom Gewicht G hängt an einem Seil an einer glatten Wand. Das Seil ist im Kugelmittelpunkt befestigt. **A1.1**

Gesucht ist die Seilkraft.

Gegeben: $a = 60$ cm, $r = 20$ cm.



Lösung a) *analytisch:* Um alle auf die Kugel wirkenden Kräfte angeben zu können, denken wir uns das Seil geschnitten und die Kugel von der Wand getrennt. An den Trennstellen führen wir die Seilkraft S und die Normalkraft N der Wand auf die Kugel als äußere Kräfte ein und erhalten so das dargestellte Freikörperbild.



Die Gleichgewichtsbedingungen lauten mit dem Hilfswinkel α:

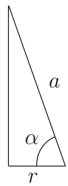
$$\rightarrow: \quad N - S\cos\alpha = 0\,,$$

$$\uparrow: \quad S\sin\alpha - G = 0\,.$$

Hieraus folgen

$$S = \frac{G}{\sin\alpha}\,,$$

$$N = S\cos\alpha = G\cot\alpha\,.$$



Aus der Geometrie liest man ab:

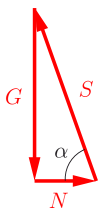
$$\cos\alpha = \frac{r}{a} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3} \qquad \text{und} \qquad \sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{8}\,.$$

Damit ergibt sich

$$\underline{\underline{S}} = \frac{3}{\sqrt{8}}\,G \approx \underline{\underline{1,06\,G}}\,.$$

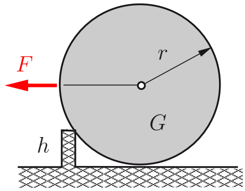
b) *grafisch:* Wir zeichnen ein geschlossenes Krafteck aus der nach *Größe* und *Richtung* bekannten Kraft G und den zwei Kräften S und N, deren Richtungen bekannt sind. Am Dreieck liest man ab:

$$\underline{\underline{S = \frac{G}{\sin\alpha}}}\,, \qquad N = G\cot\alpha\,.$$



A1.2 **Aufgabe 1.2** Eine glatte Straßenwalze (Gewicht G, Radius r) stößt an ein Hindernis der Höhe h.

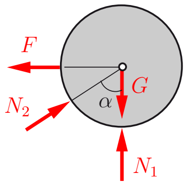
Welche Kraft F muss im Mittelpunkt angreifen, um die Walze über das Hindernis zu ziehen?



Lösung **a)** *analytisch:* Das Freikörperbild zeigt die auf die Walze wirkenden Kräfte. Dementsprechend lauten die Gleichgewichtsbedingungen

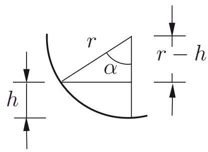
$$\rightarrow: \qquad N_2 \sin\alpha - F = 0\,,$$

$$\uparrow: \quad N_1 + N_2 \cos\alpha - G = 0\,,$$



wobei der Winkel α aus der gegebenen Geometrie folgt:

$$\cos\alpha = \frac{r-h}{r}\,.$$



Die zwei Gleichgewichtsbedingungen enthalten noch drei Unbekannte:

$$N_1\,, \quad N_2 \quad \text{und} \quad F\,.$$

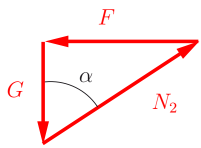
Die Kraft, welche die Walze über das Hindernis zieht, bewirkt ein Abheben der Walze vom Boden. Dann veschwindet die Normalkraft N_1 :

$$N_1 = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad N_2 = \frac{G}{\cos\alpha}\,.$$

Damit folgt

$$\underline{\underline{F}} = N_2 \sin\alpha = \underline{\underline{G\tan\alpha}}\,.$$

b) *grafisch:* Wegen $N_1 = 0$ kann das Krafteck aus dem gegebenen Gewicht G und den bekannten Richtungen von N_2 und F gezeichnet werden. Am Dreieck liest man ab:



$$N_2 = \frac{G}{\cos\alpha}\,, \qquad \underline{\underline{F = G\tan\alpha}}\,.$$