HANSER

Leseprobe

zu

„Grundlagen der Orbitmechanik“

von Volker Maiwald, Dominik Quantius und Benny Rievers

Print-ISBN 978-3-446-46219-9
E-Book-ISBN 978-3-446-46279-3

Weitere Informationen und Bestellungen unter
http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-46219-9
sowie im Buchhandel

Inhaltsverzeichnis

Bereits zu dieser Zeit gab es auch Ideen, z.B. geäußert von dem Mönch Giordano Bruno, dass die Sonne nicht nur im Mittelpunkt unseres Sonnensystems stehe, sondern sogar nur eine von vielen Sonnen im All war. Er ging von einem unendlichen Weltall aus, welches er philosophisch begründete. Auch Galilei vertrat solche Ansichten bezüglich der Sonne.

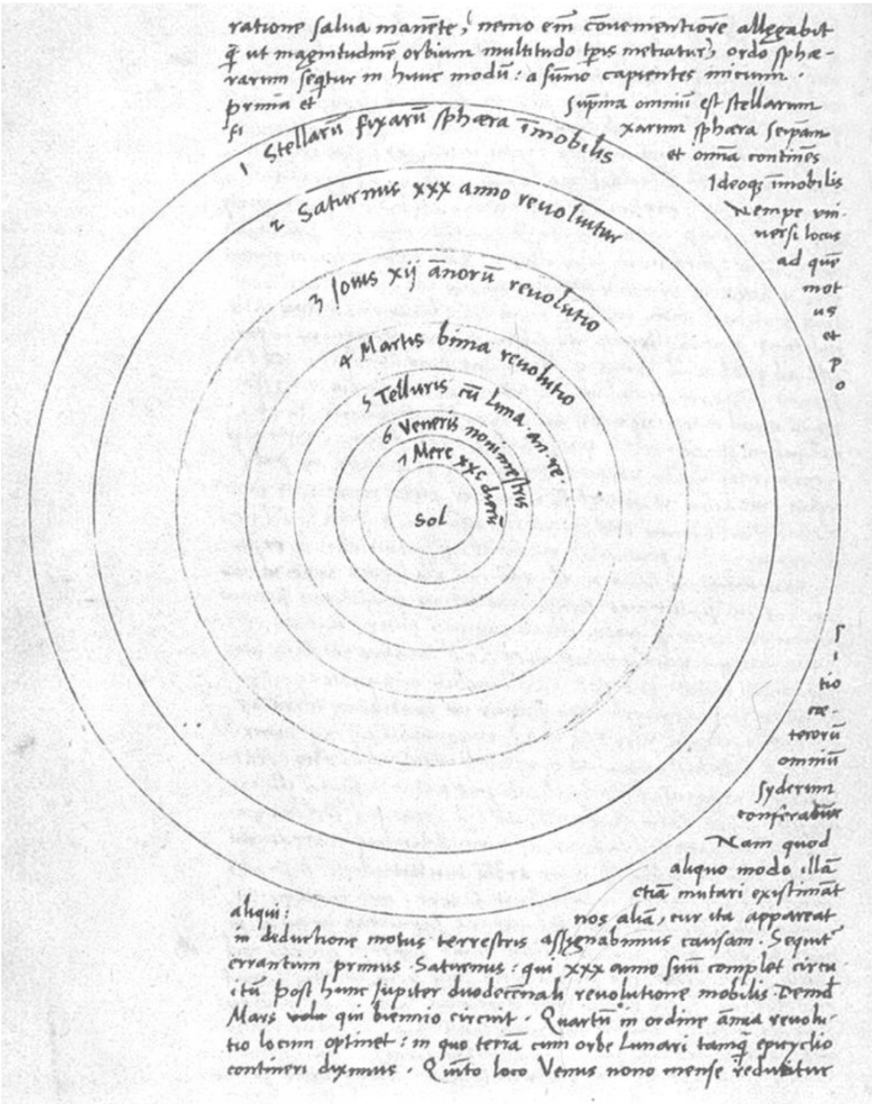


Bild 1-2

Seite aus dem Manuskript *De revolutionibus orbium coelestium* von Nikolaus Kopernikus.

[Quelle: gemeinfrei]

Im Jahre 1687 erschien schließlich Isaac Newtons *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (s. Bild 1-3), in der dieser das Gravitationsgesetz herleitete und damit die von Kepler beobachteten Bahnen mathematisch erklären konnte. Newton war der Begründer der modernen Mechanik und hat für die

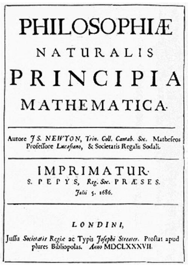
Herleitung des Gravitationsgesetzes auch an der Entwicklung der Differentialmathematik gearbeitet. Er postulierte außerdem, dass auch Kometen auf elliptischen Bahnen die Sonne umrundeten.

Das Gravitationsgesetz und seine Folgen ermöglichten erstmals Berechnungen von beliebigen Bahnen und die Auswirkung der Gravitation von Planeten auf Bahnen von Himmelskörpern. Edmond Halley, entdeckte auf Basis von Newtons Erkenntnissen, dass Kometen die Wiederkehr der gleichen Körper darstellten und sagte die Wiederkehr des nach ihm benannten Kometen für das Jahr 1758 voraus. Der Franzose Alexis-Claude Clairut z.B. berechnete eine Rückkehr des Halleyschen Kometen für das Jahr 1759. Seine Vorhersage war ungenau und die Abweichung führte er auf das Vorhandensein eines Planeten hinter Saturn zurück – gut zwanzig Jahre später wurde Uranus von Wilhelm Herschel entdeckt. Ebenso erkannte Halley durch Vergleich von Beobachtungsdaten, dass sich selbst die Sterne bewegten. Man erkannte auch eine Schwankung der Sternenposition im Laufe eines Jahres, was letztlich eine genauere Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit ermöglichte, dere Wert noch 50 Jahre zuvor als gut 200.000 km/s berechnet worden war.

Bild 1-3

Deckblatt von Newtons *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* aus dem Jahre 1687.

[Quelle: gemeinfrei]


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore *J S. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi Streater*. Prostat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

Mitte des 18. Jahrhundert verfasste Immanuel Kant zum ersten Mal eine Theorie zur Entstehung und Entwicklung des Sonnensystems aus einem Urnebel. 1761 wurde mit Hilfe eines weiteren Venustransits ihre Atmosphäre erkannt; 8 Jahre später ermöglichte ein weiterer Transit eine genaue Bestimmung des Erdabstands von der Sonne. In den 80ern des 18. Jahrhunderts veröffentlicht Joseph-Louis Lagrange seine Arbeiten zum Dreikörperproblem (s. Kapitel 9).

Ende des 18. und zu Beginn des 19. Jahrhunderts setzte eine regelrechte Beobachtungswelle ein, die darin mündete, dass man viele Kleinkörper dort entdeckte, wo man zwischen Mars und Jupiter einen weiteren Planeten vermutete. Den Anfang machte der Zwergplanet Ceres im Jahre 1801. Da er schließlich auf seiner Bahn um die Sonne hinter dieser verschwand und nicht wieder auffindbar war, leitete Carl Friedrich Gauß die heute vielfach eingesetzte Methode der kleinsten Quadrate ab und bestimmte so Ceres' Bahn, was es ermöglichte ihn wiederzufinden.

Der Bremer Arzt und Astronom Heinrich Wilhelm Olbers beschäftigte sich in seiner Arbeit ebenfalls mit Kleinkörpern. Im Jahr 1797 veröffentlichte er eine Arbeit zur Bahnberechnung von Kometen. Auch er beteiligte sich an der Suche eines möglichen Nachbars von Mars und Jupiter und entdeckte 1802 den Kleinkörper Pallas, während er eigentlich Ceres auffinden wollte. Da der „Planet" zwischen Mars und Jupiter als entdeckt galt, man aber nun einen weiteren Körper ausgemacht hatte, entwickelte Olbers die These, dass es sich um Bruchstücke eines Himmelskörpers handelte. Einen weiteren Kleinkörper entdeckte er in der Nachbarschaft von Mars im Jahre 1807: Vesta. Dieser wurde 2011 von der Sonde *Dawn* besucht.

Die Bahn des 1781 entdeckten Uranus unterlag ihrerseits wiederum Störungen, welche im 19. Jahrhundert in der Annahme der Anwesenheit eines weiteren Planeten gipfelten. Urbaun Le Verrier und John Couch Adams kamen unabhängig voneinander zu gleichen Ergebnissen und Johann Gottfried Galle konnte unter Anleitung von Le Verrier schließlich im Jahre 1846 Neptun an der berechneten Position entdecken.

Eine weitere Bahnabweichung, die man zuerst einem Planeten zuschrieb, war die Perihelwanderung (Drehung des sonnennächsten Punktes) des Merkur. Die Suche nach einem anderen Planeten, genannt Vulkan, blieb erfolglos. Albert Einstein konnte schließlich mit seiner allgemeinen Relativitätstheorie, veröffentlicht im Jahre 1915, eine Erklärung für die Bewegung liefern und erweiterte somit unser Verständnis von Gravitation und damit auch der Orbitmechanik und natürlich der Kosmologie.

Bereits 1903 wurde von Konstantin Eduardowitsch Ziolkowski die Raketengrundgleichung veröffentlicht (s. Kapitel 7), die Grundlage für die Stufung von Raketen. Herrmann Oberth veröffentlichte im Jahre 1923 sein Werk *Die Rakete zu den Planetenräumen* in dem er seine Erkenntnisse zum Bau von Raketen zusammenfasste und das auch schon Ideen zu einem elektrischen Triebwerk mit niedrigem Schub, einem Ionentriebwerk, enthielt. Ebenfalls zu Beginn des 20. Jahrhunderts befasste sich Robert Goddard mit Flügen zum Mond und dem Bau und Test von Raketen.

Wernher von Braun arbeitete im zweiten Weltkrieg an der V2 und brachte diese Rakete zur Serienreife. Zu diesem Zeitpunkt war die Rakete leider als Waffe entwickelt worden und stellt damit wohl das dunkelste Kapitel der Raumfahrt dar. Nicht nur war die V2 durch Abschuss auf Städte für viele Todesopfer verantwortlich, sondern bei ihrer Herstellung kamen auch Zwangsarbeiter zum Einsatz unter entsprechend unmenschlichen Bedingungen. Insgesamt starben durch die Rakete ungefähr 30.000 Menschen. Nach dem Krieg ging von Braun in die USA und setzte dort seine Arbeit im zivilen Raumfahrtprogramm fort. Der Raketenkonstrukteur Sergei Koroljow arbeitete auf sowjietischer Seite mit einstigen Mitarbeitern von Brauns am sowjietischen Raketenprogramm, was 1957 schließlich im Start von Sputnik gipfelte und das Weltraumrennen zwischen den USA und der Sowjetunion einleitete. Die Orbitmechanik mit Bezug zur Raumfahrt wandelte sich damit endgültig von bloßer Theorie zu Praxis.

1.2 Kapitelübersicht

Dieses Buch zielt darauf ab, die Orbitmechanik leicht verständlich, anschaulich und praxisnah zu vermitteln. Die Inhalte reichen von der einfachen Himmelsmechanik, mit der sich natürliche Bewegungen beschreiben lassen, bis zur Beschreibung von Bahnen unter künstlichem Schub.

Zu Beginn werden die grundlegenden mathematischen und physikalischen Inhalte eingeführt, denn ohne Vektorrechnung und Differerentialmathematik lässt sich Orbitmechanik nicht vermitteln.

Anschließend wird in Kapitel 3 auf Koordinatensysteme eingegangen. Um Bewegungen zu beschreiben, muss man sich auf Systematiken zur Beschreibung von Position und Richtung einigen. Dort werfen wir auch einen Blick auf das Sonnensystem als solches und wie die Bewegungen der Planeten aussehen.

Kapitel 4 beschäftigt sich analog zur räumlichen Referenz mit Zeitsystemen. Da die Situation im Sonnensystem zeitlich stark veränderlich ist, ist es notwendig Zeitsysteme zu definieren. Mit diesen kann man angeben, zu welchem Zeitpunkt eine Angabe Gültigkeit hat.

In Kapitel 5 wird es dann ernst. Hier wird die Physik auf Spuren von Newton vertieft, die Gravitationskraft beschrieben und als Ursache natürlicher Bahnen von Himmelskörpern betrachtet. Außerdem werden die Grenzen von Idealannahmen aufgezeigt, z.B. durch Abweichung der Erde von einer perfekten Kugelform.

Kapitel 6 leitet schließlich die Bewegungsgleichungen des Zweikörperproblems her, einem einfachen Modell von zwei Körpern, die sich aufgrund von Gravitation umeinander bewegen. Schließlich wird es damit möglich, Vorhersagen über Position und Bahn eines Himmelskörpers zu treffen.

Kapitel 7 widmet sich der Anwendung dieser Gleichungen und zeigt vereinfachte aber dafür leicht verständliche Methoden auf, um Flugbahnen zu berechnen und auch Missionen zu planen, d.h. Manöver zu definieren, die notwendig sind, um Bahnen zielorientiert zu ändern.

Kapitel 8 stellt typische Bahnen vor, die heute häufig für Satelliten angewendet werden, z.B. der geosynchrone Orbit.

Kapitel 9 erweitert den Werkzeugkasten der Orbitmechanik auf das Mehrkörperproblem und liefert ähnliche Betrachtungen wie zuvor für das Zweikörperproblem bzgl. Energie und Impuls.

Kapitel 10 zeigt auf, wie Bahnen und Missionen im Dreikörperproblem berechnet werden können und stellt den Idealbetrachtungen der vorangegangenen Kapitel die realistische und präzise Anwendung gegenüber.

Den Abschluss macht Kapitel 11 mit einer Darstellung eines Spezialfalls, den Niedrigschubbahnen, welche sich dadurch auszeichnen, dass sie ständigen, schwachen Änderungen unterliegen und z.B. für Oberths Ionenantrieb angewendet werden. Es werden die relevanten Informationen vermittelt, um Unterschiede zu den bisher behandelten Bahnen zu verstehen und auch die Stichworte geliefert, um selbstständig weiter zu recherchieren.

Am Ende finden sich Beispielaufgaben, die durch Anwednung das Verständnis des Stoffs verbessern.

Dieses Buch basiert auf der Vorlesungsreihe „Raumflugmechanik“ an der Universität Bremen, geht aber an vielen Stellen über diese hinaus. Wenn die Inhalte verinnerlicht sind, kann der Leser Machbarkeiten von Missionskonzepten aus Sicht der Orbitmechanik überprüfen und erste Abschätzungen für die Auslegung eines Raumfahrzeugs bzgl. der Bahn treffen, z.B. über Treibstoffmassenbedarfe oder auch hinsichtlich Anforderungen, die sich aus dem zeitlichen Ablauf der geplanten Manöver ergeben.

- Eine Zahl multipliziert mit einer Vektorsumme, ergibt das gleiche wie die Summe der Zahl multipliziert mit jedem der Vektoren (ähnlich wie 3 · (5+4)= 3 · 5+3 · 4=27):

$$3 \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 3 \cdot \vec{a} + 3 \cdot \vec{b}$$

- Die Summe zweier Zahlen multipliziert mit einem Vektor ergibt das gleiche, wie jede Zahl multipliziert mit dem Vektor und die folgende Addition der Vektoren (im Grunde das gleiche wie oben):

$$\vec{a} \cdot (2 + 5) = 2 \cdot \vec{a} + 5 \cdot \vec{a}$$

- Eine Zahl multipliziert mit einer Zahl und dann mit einem Vektor, ergibt das gleiche, wie die Multiplikation der zweiten Zahl mit dem Vektor und dann der ersten Zahl (analog zu (3 · 4) · 5 = 3 · (4 · 5)=60):

$$(3 \cdot 2) \cdot \vec{a} = 3 \cdot (2 \cdot \vec{a})$$

- Ebenso braucht es die 1 als neutrales Element der Multiplikation (analog ist 1 · 3 immer noch 3):

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

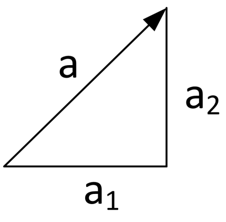
Die exakten mathematischen Formulierungen sind etwas abstrakter (und damit vielseitiger), für unsere anschaulichen Zwecke reichen diese Formulierungen allerdings aus.

Damit liegen die wichtigsten Rechenregeln schon einmal fest. Der Betrag eines Vektors ist seine Länge und kann einfach aus seinen Komponenten bestimmt werden. Die Richtungen der Komponenten stehen für gewöhnlich senkrecht aufeinander (warum wird gleich erklärt) und daraus lässt sich ableiten, dass der Betrag eines Vektors gerade gleich der Wurzel aus der Summe der Quadrate seiner Komponenten ist – ganz so, wie man die Länge der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks berechnet (Satz des Pythagoras). Konkret heißt das für einen dreidimensionalen Vektor (vgl. Bild 2-1):

$$|\vec{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$$

Bild 2-1

Betrag a eines zweidimensionalen Vektors mit den Komponenten a_1 und a_2.



Jeder Vektorraum wird zudem noch durch eine Reihe von Basisvektoren definiert. Diese Vektoren legen im Grunde sein Gerüst fest und haben immer die Länge eins. Sie müssen außerdem linear unabhängig sein (also rechtwinklig zueinander). Das bedeutet einfach, sie dürfen nicht so formuliert sein, dass man den einen aus den übrigen herleiten kann. Kombiniert man aber – mit Hilfe der oben genannten Regeln – diese drei Vektoren oder ihre Vielfachen miteinander, so kann man jeden anderen Vektor des Raums erhalten. Das klingt ebenfalls viel komplizierter als es ist.

Sehen Sie sich um. Sie sind in einem dreidimensionalen Raum. Wenn Sie jetzt aus ihren Armen ein L formen, das parallel zum Boden liegt, also genau 90° zwischen ihren Armen sind, dann haben sie schon eine Definition von zwei Richtungen vorgenommen. Sie könnten die Richtung des einen Arms nicht durch die Richtung des anderen angeben. Diese beiden wären also linear unabhängig.

Führen sie nun ihre Arme näher zueinander, so dass nur noch 45° zwischen ihnen sind, dann könnten sie die Längsrichtung des einen durch den anderen Arm ausdrücken. Sie sind also nicht linear unabhängig. Dasselbe machen wir nun mit drei Vektoren.

Stellen sie sich vor, wir definieren für einen Raum, z.B. das Wohnzimmer oder das Strandcafé in dem Sie dieses Buch lesen, drei verschiedene Richtungen: x, y, z. Und diese schreiben wir in der Reihenfolge von oben nach unten in unseren Vektoren, dann bilden die folgenden drei Vektoren eine mögliche Basis:

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sie haben die Länge 1, damit jeder Vektor aus einer Linearkombination von ihnen erstellt werden kann, ohne eine Skalierung, so z.B. der Vektor $(4 \;\; 2{,}3 \;\; 3)^T$ von eben:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2{,}3 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \cdot \vec{e}_x + 2{,}3 \cdot \vec{e}_y + 3 \cdot \vec{e}_z$$

Diese Idee ist wichtig, wenn wir uns später noch mit Koordinatensystem beschäftigen, die nämlich nichts anderes sind, als Vereinbarungen über die entsprechenden Basisvektoren. Aber schauen wir uns die Berechnung noch einmal genauer an.

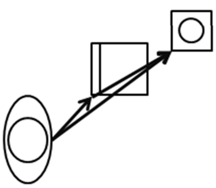
2.1.2 Vektoraddition und -subtraktion

Vektoren zu addieren ist denkbar simpel: Man addiert einfach die Werte der Vektoren zeilenweise. Die Subtraktion geht analog, da sie ja nichts anderes als die Addition einer negativen Zahl ist. Wenn man dabei im Kopf hat, dass ein Vektor nur eine Richtungsangabe ist, dann wird auch sehr schnell klar, warum die Addition so einfach ist.

Stellen sie sich vor, sie sind in einem Raum, in dem ein Stuhl steht und eine Lampe. Um zum Stuhl zu kommen müssen sie einen Schritt nach vorne machen und einen zur linken Seite. Um von dem Stuhl zur Lampe zu kommen, müssen sie zwei Schritte nach vorne machen und einen nach links. Intuitiv werden sie nun sicherlich erschließen können, wie viele Schritte sie brauchen, um direkt zur Lampe zu gehen. Nämlich zwei nach links und drei nach vorne. Dieses Szenario ist in Bild 2-2 dargestellt. Passen sie auf, dass sie nicht über den Stuhl stolpern.

Bild 2-2

Schrittweises Vorgehen bei der Vektoraddition, ergibt das gleiche, wie das sofortige Ausführen der gesamten Positionsänderung.



Um die Vektoren aus diesem Beispiel mathematisch aufzugreifen, können wir schreiben:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$$

Ihnen ist vielleicht aufgefallen, dass wir hier einfach die erste Komponente als „nach vorne“ definiert haben, die zweite als „nach links“ und die dritte gar nicht verwendet haben. Dies ist vollkommen willkürlich geschehen und hätte auch beliebig anders ausfallen können, allerdings gleich bei allen Vektoren.

2.1.3 Skalarmultiplikation und Skalarprodukt eines Vektors

Genau wie in der Mathematik mit einfachen Zahlen, die man auch als eindimensionale Vektoren auffassen kann, können wir Vektoren skalar (also mit einer Zahl) multiplizieren: es ist ein Vielfaches der Addition mit sich selbst. Also wird die skalare Multiplikation ebenso zeilenweise ausgeführt:

$$2\cdot\begin{pmatrix}4\\2{,}3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 3\\2\cdot 2{,}3\\2\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\4{,}6\\6\end{pmatrix}$$

Hier sollte man im Kopf haben, dass das Ergebnis ebenfalls wieder ein Vektor ist. Anders sieht es beim Skalarprodukt aus. Dort kann man sich merken – daher der Name – kommt immer eine Zahl als Ergebnis heraus, wenn man Vektoren miteinander so multipliziert.

Formal lässt sich das Skalarprodukt als das Produkt von den Beträgen beider Vektoren definieren, mal dem Kosinus des Winkels (hier φ genannt), der von ihnen eingeschlossen ist: blupp

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\varphi$$

Für den Fall von parallelen Vektoren degeneriert das Skalarprodukt zum Produkt der Beträge, da $\varphi = 0$ bedeutet, dass der Kosinus gerade 1 ist. Der andere Extremfall sind zwei senkrecht zueinander stehende Vektoren. Dort wird der Kosinus gerade 0, d.h. auch das Skalarprodukt ist 0. Für kartesische Koordinaten, lässt sich das Skalarprodukt aber auch als zeilenweises Produkt schreiben, so dass man nicht immer den entsprechenden Winkel kennen muss. Dies geschieht dann so:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots$$

Anders herum lässt sich damit natürlich leicht der Winkel zwischen zwei Vektoren bestimmen, da das Skalarprodukt auch ohne ihn errechnet werden kann. Zusammenfassend kann man sagen, dass das Skalarprodukt die Projektion des einen Vektors auf den anderen ist.

2.1.4 Kreuzprodukt oder Vektorprodukt

Das Kreuzprodukt, das wegen seines Zeichens × so genannt wird, heißt auch Vektorprodukt. Per Definition steht das Ergebnis eines Vektorprodukts senkrecht auf den beiden beteiligten Vektoren und bildet mit ihnen ein Rechtssystem. Dies wiederum bedeutet, dass das Drehen einer Koordinatenachse in die Richtung der nachfolgenden Koordinatenachse im mathematischen positiven Sinn, d.h. gegen den Uhrzeigersinn, erfolgt. Dies kann man einfach mit der Hand ausprobieren.

Halten sie ihre rechte Hand so, dass die Handfläche nach oben zeigt, spreizen sie nun den Daumen ab. Dies ist die x-Achse. Klappen sie nun alle Finger bis auf den ausgestreckten Zeigefinger ein. Dieser ist die y-Achse. Stellen sie nun den Mittelfinger – ohne Gedanken an beleidigende Handgesten – senkrecht dazu auf und erhalten die z-Achse. Dies ist insgesamt ein Rechtssystem (s. Bild 2-3). Würden sie die x-Achse, also den Daumen – drehen wollen, um in die y-Achsenrichtung zu zeigen, müssten sie den Daumen dazu entgegen des Uhrzeigersinns drehen.

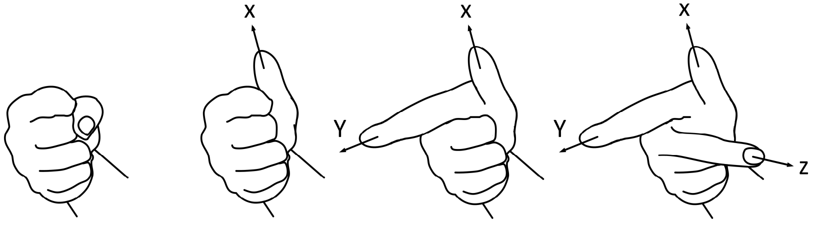


Bild 2-3

Die Rechte-Hand-Regel zur Veranschaulichung eines Rechtssystems von Koordinaten.

Auch das Kreuzprodukt lässt sich wieder mit dem Winkel zwischen den beiden beteiligten Vektoren ausdrücken und dem dazugehörigen Normalenvektor. Letzterer steht immer senkrecht auf einer Ebene – in diesem Fall auf der Ebene der beiden multiplizierten Vektoren (ihr Mittelfinger ist z.B. senkrecht auf der Ebene ihres Daumens und Zeigefingers). Der Betrag des Kreuzprodukts ist nun der Flächeninhalt des Parallelogramms der beiden beteiligten Vektoren, also:

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin\varphi$$

Es gibt verschiedene Rechenregeln für das Kreuzprodukt, z.B. über Determinanten, oder die Regel des Sarrus. Für unseren dreidimensionalen Fall, lässt sich aber auch folgende Regel benutzen:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Diese sieht nun auf den ersten Blick kompliziert aus, ist es aber eigentlich nicht. Zunächst einmal wechseln sich einfach die Komponenten nur ab und außerdem hilft einem das ×. Man merkt sich nur, dass man mit der Berechnung in der goldenen Mitte beginnt, also bei a_2. Dann folgt man der Richtung des ersten Strichs des Kreuzes zu b_3. Jetzt hat man schon den ersten Teil der ersten Komponente. Dann folgt ein Minus und man folgt der Richtung des zweiten Strichs des Kreuzes von a_3 nach b_2. Danach geht man eine Komponente tiefer und startet mit dem selben Prozess bei a_3 (wobei der Strich anstatt ihn ins Leere zu laufen zu lassen, wieder oben bei b_1 angesetzt wird) und für die dritte Komponente bei a_1. Fertig ist das Kreuzprodukt, ohne Merken einer komplizierten Formel.

Durch Ausprobieren kann man schnell feststellen, dass die Reihenfolge der beiden Vektoren nicht vertauscht werden kann:

$$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$$

Das Kreuzprodukt braucht man im Zusammenhang der Orbitmechanik, z.B. um den Drehimpuls einer Bahn zu definieren.

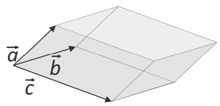
2.1.5 Spatprodukt

Das Spatprodukt ist eine Kombination des Vektor- und des Skalarprodukts. Ein Spat ist im Grunde eine Art „schiefer Kubus", d.h. ein geometrischer Körper, der von sechs in parallelen Ebenen liegenden und paarweise deckungsgleichen Parallelogrammen begrenzt ist.

Das Spatprodukt (s. Bild 2-4) beschreibt anschaulich betrachtet das Volumen des Körpers und lässt sich in Vektoren schreiben als:

Bild 2-4

Ein Spat und die Vektoren des Spatprodukts.



$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$$

Auf diese Weise lassen sich Vektoren mitunter geschickt umordnen. Wir werden dies im Laufe unserer Herleitungen in späteren Kapiteln noch nutzen.

2.2 Transformationsmatrizen

Im Abschnitt 2.1.1 haben wir über Basisvektoren gesprochen und darüber, dass Koordinatensysteme im Grunde nur Vereinbarungen von Basisvektoren darstellen. Nun kann es passieren, dass man Vektoren von einem Basisvektorsystem in ein anderes überführen will. Dies kommt z.B. vor, wenn sie ein Koordinatensystem haben, das fest für einen Satelliten definiert ist, dieser sich allerdings in einem anderen Koordinatensystem bewegt, z.B. eines von der Erde aus betrachtet. Wenn man jetzt einen Vektor vom einen in das andere System übertragen will – z.B. einen Schubvektor – braucht man dafür eine Vorschrift und diese liefern sogenannte Transformationsmatrizen.

Eine Matrix ist im Grunde eine Aneinanderreihung von Vektoren, bzw. ein Vektor ist eine kleine Matrix. Dabei definiert man die Dimensionen einer Matrix immer in Zeilen und Spalten, wobei ein Vektor eben eine Matrix mit einer Spalte ist und in unserem Fall drei Zeilen. Gekennzeichnet werden Matrizen häufig durch fettgedruckte Buchstaben oder durch (doppelt) unterstrichene. Wir wollen hier ersteres verwenden.

Transformationsmatrizen werden immer multipliziert und dies nach einer bestimmten Vorschrift, dabei ist ähnlich wie beim Vektorprodukt die Reihenfolge nicht beliebig. Für unsere Zwecke können wir uns merken, dass wir immer „links" multiplizieren, d.h. wenn ein Vektor mit einer Matrix multipliziert werden soll, dann schreiben wir:

$$\boldsymbol{A}_{ij} \cdot \vec{r}_j = \vec{r}_i$$

wobei i und j in diesem Fall die verschiedenen Koordinatensysteme kennzeichnen und $\boldsymbol{A}_{ij}$ die Matrix, die von j nach i transformiert. Es handelt sich um die gleiche Position wie zuvor, aber aus einer anderen „Perspektive" betrachtet. Soll eine weitere Transformation erfolgen, so multiplizieren wir die Matrix wieder links, nicht etwa rechts von der ersten oder dem Vektor.

Wir benutzen für unsere Transformationen nur Drehmatrizen mit bestimmten Eigenschaften, d.h. die Transformation ist eine Rotation des Koordinatensystems.

Für Matrizenmultiplikation gilt das Assoziativgesetz, d.h.:

$$\boldsymbol{A}_{ij} \cdot \left(\boldsymbol{A}_{jk} \cdot \vec{r}_k\right) = \left(\boldsymbol{A}_{ij} \cdot \boldsymbol{A}_{jk}\right) \cdot \vec{r}_k$$

Das Kommutativgesetz gilt hingegen nicht:

$$\boldsymbol{A}_{ij} \cdot \boldsymbol{A}_{jk} \cdot \vec{r}_k \neq \boldsymbol{A}_{jk} \cdot \boldsymbol{A}_{ij} \cdot \vec{r}_k$$

Wir wollen uns das in einem Beispiel noch einmal genauer ansehen. Stellen sie sich vor, zwei Personen begegnen sich wie in Bild 2-5, während eines Spaziergangs. Da es sonnig ist, tragen die beiden jeweils einen Sombrero – das hat zwar nichts mit der Aufgabe zu tun, lässt sich aber leichter skizzieren. In Bewegungsrichtung ist für beide die Richtung x, bzw. x'. Die anderen Achsen ergeben sich aus der Rechten-Hand-Regel. Beide blicken außerdem zu einem Auto (gestrichelte Linie). Die Richtungen unterscheiden sich, da sich ihre ihre Koordinantensysteme unterscheiden und ihre Positionen.

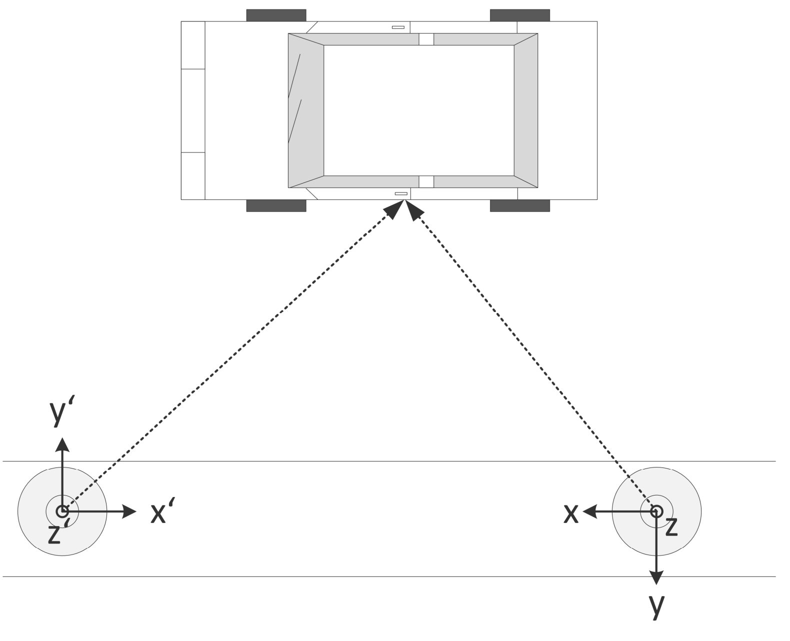


Bild 2-5

Zwei Fußgänger begegnen sich und haben ihrerseits einen Blick auf ein Auto (gestrichelte Richtung), während ihre Bewegungsrichtung jeweils ihre lokale x-Richtung ist, bzw. x'-Richtung.

Würde jetzt die eine Person der anderen beschreiben, wo sie das Auto sieht, dann würde sie im Falle von Person x sagen, dass sie nach rechts vorne blickt. Person x' würde sagen, sie blickt nach links vorne.

Um zu verstehen, was Person x' meint, muss sich Person x in deren Lage versetzen, also ihr eigenes Koordinatensystem in das von x' transformieren und den gleichen Vektor annehmen. Zunächst geht Person x auf x' zu und nimmt (nahezu) die gleiche Position ein (d.h. der Koordinatenursprung ist gleich). Jetzt ist der Vektor der gleiche, aber er wird noch immer unterschiedlich beschrieben. Deswegen ist noch eine Drehung um die z-Achse erforderlich, um die Koordinatensysteme gleich auszurichten.

2.3 Differentialrechnung

Differentialrechnung lässt sich nicht in einem kurzen Absatz vollumfänglich erklären. Aber vielleicht zumindest in Erinnerung rufen.

Die Ableitung einer Funktion beschreibt die Änderung dieser ursprünglichen Funktion in Abhängigkeit einer bestimmten Variablen. So ist beispielsweise die Geschwindigkeit die Ableitung des Weges nach der Zeit, also die Änderung des Weges über der Zeit. Dies ist auch sofort an der Einheit ersichtlich: Meter pro Sekunde, also welche Strecke wird innerhalb einer bestimmten Zeiteinheit zurückgelegt.

Die Entwicklung der Differentialrechnung umfasst mehrere Jahrhunderte. Das Ausgangsproblem war die Definition der Tangentensteigung an einem beliebigen Punkt einer Funktion, worüber man Differentiale anschaulich erklären kann, es gibt aber auch andere Definitionen.

Die Ableitung einer Funktion f, die von einem beliebigen offenen Intervall U auf $\mathbb{R}$ abbildet, an der Stelle $x_0 \in U$ lautet:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{2-1}$$

Existiert dieser Grenzwert an der Stelle x_0, so ist die Funktion dort differenzierbar und der Grenzwert wird als Differentialquotient oder Ableitung von f nach x an er Stelle x_0 bezeichnet.

Diese Ableitung wird nach Lagrange auch als f' („F – Strich" gesprochen) bezeichnet, oder nach Leibniz $\frac{df}{dx}(x_0)$ notiert. Existiert die Ableitung für beliebige x_0, so kann man eine komplette Funktion f' finden, die dann für jede dieser beliebigen Stellen die Ableitung angibt.

2.3.1 Rechenregeln

Alle Rechenregeln für Differentiale hier aufzuführen, würde den Rahmen dieses Buches sprengen, daher beschränken wir uns auf die, die für unsere Anwendung besonders relevant sind.

Zunächst einmal gilt, dass konstante Funktionen eine Ableitung von 0 haben, d.h. sie ändern sich nicht (da sie ja konstant sind):

$$f(x) = a \Leftrightarrow f'(x) = 0, \text{mit } a = const$$

Ebenso gilt, dass ein konstanter Faktor (z.B. a) vor einer Funktion, als Faktor vor der Ableitung erhalten bleibt:

$$(a \cdot f)' = a \cdot f'$$

Die Ableitung von Summen von Funktionen ist gleich den Summen von den Ableitungen dieser Funktionen:

$$(g + f)' = g' + f'$$

Eine der einfachsten Regeln zur Berechnung von Ableitungen ist die Potenzregel:

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

Also beispielsweise lässt sich x^2 ableiten zu:

$$\frac{dx^2}{dx} = 2x$$

Die Produktregel ermöglicht das Berechnen von Ableitungen für miteinander multiplizierte Funktionen:

$$(g \cdot f)' = g' \cdot f + g \cdot f'$$

So gilt beispielsweise:

$$\frac{d(\sin(x) \cdot x^2)}{dx} = \cos(x) \cdot x^2 + \sin(x) \cdot 2x$$

Ähnlich verhält es sich mit der sogenannten Quotientenregel, welche im Grunde eine besondere Form der Produktregel ist und lautet:

$$\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g' \cdot f - g \cdot f'}{f^2}$$

Außerdem ist noch die sogenannte Kettenregel wichtig, die Ableitungen ermöglicht, wenn Funktionen ineinander verschachtelt sind:

$$(g \circ f)'(x) = \Big(g\big(f(x)\big)\Big)' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Beispielsweise lässt sich schreiben, dass:

$$\frac{d(2x^2 + 1)^3}{dx} = 3(2x^2 + 1)^2 \cdot 4x = 12x(2x^2 + 1)^2$$