



Christian van Randenborgh

Instrumente der Wissensvermittlung im Mathematik- unterricht

Der Prozess der Instrumentellen
Genese von historischen
Zeichengeräten



Springer Spektrum

Christian van Randenborgh

Instrumente der Wissensvermittlung im Mathematik- unterricht

Der Prozess der Instrumentellen
Genese von historischen
Zeichengeräten



Springer Spektrum

Instrumente der Wissensvermittlung im Mathematikunterricht

Christian van Randenborgh

Instrumente der Wissensvermittlung im Mathematikunterricht

Der Prozess der Instrumentellen Genese von
historischen Zeichengeräten

Christian van Randenborgh
Zentrum f. schulprakt. Lehrerbildung
Bielefeld, Deutschland

Dieses Buch wurde auf der Grundlage der Dissertation des Autors an der Universität Würzburg erstellt. Die Dissertation trägt den Titel:

„Der Prozess der Instrumentellen Genese von historischen Zeichengeräten zu Instrumenten der Wissensvermittlung (Untertitel: Die Bedeutung historischer Zeichengeräte für das Aufdecken verborgener Ideen im Mathematikunterricht)“

ISBN 978-3-658-07290-2 ISBN 978-3-658-07291-9 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-07291-9

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer Fachmedien Wiesbaden, 2015

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Fachmedien Wiesbaden ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Vorwort

Im Zeitalter von Smartphone und Computer, grafikfähigem Taschenrechner und Computer-Algebra-System, Tabellenkalkulation und dynamischer Geometriesoftware etc. bedarf es schon einer besonderen Rechtfertigung und guter Gründe, warum sich das Interesse am Einsatz historischer mathematischer Instrumente heute noch lohnt. Geht es darüber hinaus um den Einsatz derartiger Geräte im heutigen Mathematikunterricht, so gilt es auch didaktische Ziele zu benennen. Das hier vorliegende Buch beschäftigt sich mit realen und digitalen Nachbauten von historischen Zeichengeräten, speziell dem Parabelzirkel von FRANS VAN SCHOOTEN und dem Pantographen von CHRISTOPH SCHEINER. Es möchte einerseits gute Gründe für die Beschäftigung mit historischen mathematischen Instrumenten geben und andererseits Interesse an diesen Geräten wecken.

Bei Schülerinnen und Schülern, so zeigen es deren Rückmeldungen, wecken die hier vorgestellten Zeichengeräte Neugier, ihr Einsatz im Mathematikunterricht ermöglicht es ihnen, eigene Entdeckungen zu machen. Für den Mathematikunterricht lohnend ist die Beschäftigung mit historischen Zeichengeräten vor allem deshalb, weil Schülerinnen und Schüler die zugrundeliegende Mathematik aufdecken können. Jedes Zeicheninstrument beruht auf einer mathematischen Idee. Sichtbar wird diese Idee jedoch in der Regel erst nach einer genaueren Untersuchung des Geräts. Damit ist eine didaktische Idee angesprochen, die mit der Erforschung des Geräts verbunden werden kann.

Den Anstoß zu diesem Buch, dessen Grundlage meine Dissertation ist, habe ich aus den Beobachtungen und Erfahrungen erhalten, die ich selbst als Gymnasiallehrer mit dem Unterrichtseinsatz des Parabelzirkels gewonnen habe. Seit dieser Zeit begleitet mich mein Doktorvater, Herr Prof. Dr. Hans-Georg Weigand. Ich bin ihm für seine Unterstützung, seine freundliche und hilfsbereite Art und für seine vielen guten Worte sehr dankbar. Danken möchte ich auch Herrn Prof. Dr. Anselm Lambert für sein Interesse und seinen genauen Blick und die konstruktive Kritik.

Darüber hinaus gilt mein Dank den Schülerinnen und Schülern, die meine Nachbauten der historischen Zeichengeräte erforscht und meine Arbeitsaufträge motiviert bearbeitet haben. Natürlich richtet sich der Dank auch an ihre Lehrerinnen und Lehrer, die mir die Unterrichtsdurchführung in ihren Kursen ermöglicht haben.

Abschließend möchte ich mich an dieser Stelle bei meiner Familie für die erhaltene Unterstützung, die Zeit und das Verständnis bedanken. Damit meine ich meine Eltern, insbesondere meinen Vater für seine mathematische, didaktische und moralische Unterstützung. Ganz besonders bedanke ich mich für die erhaltenen Freiräume und das Ertragen meines Arbeitspensums bei meiner Frau und meinen Kindern Manuel und Alina.

Christian van Randenborgh, Bielefeld im September 2014

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|----|
| Vorwort | V |
| Einleitung | 1 |
| Kapitel 1: Was sind historische Zeicheninstrumente? | 5 |
| 1.1 Was ist ein Instrument? | 5 |
| 1.2 Welche Kriterien muss ein mathematisches Instrument erfüllen, um als Zeicheninstrument bezeichnet werden zu können? | 5 |
| 1.2.1 Der Parabelzirkel von van Schooten als Ideenkonglomerat | 7 |
| 1.2.2 Der Pantograph von Scheiner als Ideenkonglomerat | 11 |
| 1.3 Wann ist ein Instrument, das zum Zeichnen genutzt werden kann, ein mathematisches Instrument? | 14 |
| 1.4 Die zwei wichtigsten Stationen von Zeicheninstrumenten in der Mathematik- geschichte | 15 |
| 1.4.1 Zeichengeräte in der Antike | 15 |
| 1.4.1.1 Euklids Elemente | 15 |
| 1.4.1.2 Pappos | 22 |
| 1.4.2 Zeichengeräte im 17. Jahrhundert | 22 |
| 1.4.2.1 Descartes | 22 |
| 1.4.2.2 Organische Geometrie | 32 |
| 1.5 Gelenkmechanismen | 34 |
| 1.6 Die Entwicklung von zwei speziellen Gelenkmechanismen | 36 |
| 1.6.1 Ein besonderes Kurvenzeichengerät: Der Parabelzirkel von van Schooten | 36 |
| 1.6.1.1 Fadenkonstruktion | 36 |
| 1.6.1.2 Spezielle andere Parabelzirkel | 38 |
| 1.6.2 Ein besonderer Pantograph: Der Pantograph von Scheiner | 42 |
| 1.6.2.1 Der Pantograph von Bramer | 42 |
| 1.6.2.2 Der Pantograph von Schwenter | 44 |
| 1.6.2.3 Der Pantograph von Scheiner | 44 |
| 1.6.2.4 Weitere Entwicklungen | 44 |

| | | |
|--|--|----|
| 1.6.3 | Zusammenstellungen von Zeichengeräten | 46 |
| 1.6.3.1 | Der Parabelzirkel von van Schooten in diesen Zusammenstellungen von Zeichengeräten | 46 |
| 1.6.3.2 | Der Pantograph von Scheiner in diesen Zusammenstellungen von Zeichengeräten | 49 |
| 1.7 | Fazit: Der Parabelzirkel von van Schooten und der Pantograph von Scheiner . | 52 |
| Kapitel 2: Standortbestimmung | | 53 |
| 2.1 | Instrumentelle Genese | 53 |
| 2.1.1 | Zwänge und Möglichkeiten – Vorwissen und Fähigkeiten | 55 |
| 2.1.1.1 | Spezielle Zwänge und Möglichkeiten der hier untersuchten Zeichengeräte | 55 |
| 2.1.1.2 | Das jeweilige Vorwissen und Fähigkeiten des Nutzers | 57 |
| 2.1.2 | Weitere Faktoren im Prozess der Instrumentellen Genese im schulischen Kontext | 59 |
| 2.1.3 | Die Übertragbarkeit des Ansatzes der Instrumentellen Genese auf den Einsatz eines historischen Zeichengeräts im Mathematikunterricht ... | 59 |
| 2.1.3.1 | Bau- und Funktionsweise des Parabelzirkels | 62 |
| 2.1.3.2 | Bau- und Funktionsweise des Pantographen | 62 |
| 2.1.3.3 | Fazit | 63 |
| 2.2 | Semiotische Vermittlung | 64 |
| 2.2.1 | Wygotskis Grundannahmen | 64 |
| 2.2.1.1 | Lernen | 64 |
| 2.2.1.2 | Psychologische Werkzeuge | 66 |
| 2.2.1.3 | Fazit | 69 |
| 2.2.2 | Die Vermittlungsfunktion eines Artefakts | 71 |
| 2.2.3 | Fazit | 74 |
| 2.3 | Der theoretische Untersuchungsrahmen für den Einsatz eines historischen Zeichengerätes im Mathematikunterricht | 78 |
| 2.3.1 | Artefakt-Produkt-Analyse: Die temporäre Betrachtungsphase | 78 |
| 2.3.2 | Beziehungsanalyse der Bau- und Funktionsweise: Die separate Betrachtungsphase | 79 |
| 2.3.3 | Wissensanalyse: Die synoptische Betrachtungsphase | 80 |
| 2.3.4 | Die Betrachtungsphasen und die triadische Zeichenrelation | 80 |
| 2.3.5 | Objekte – Operationen, Eigenschaften und Wirkungen | 81 |
| 2.3.6 | Fazit: Instrumentelle Genese und Semiotische Vermittlung beim Einsatz historischer Zeichengeräte im Mathematikunterricht | 83 |
| Kapitel 3: Empirische Untersuchungen | | 85 |
| 3.1 | Bisherige Untersuchungen über den Einsatz historischer Zeichengeräte im Mathematikunterricht | 85 |
| 3.2 | Empirische Untersuchung des Parabelzirkels von van Schooten | 89 |
| 3.2.1 | Forschungsfragen | 89 |
| 3.2.2 | Untersuchungsansatz – theoretische Grundlagen | 92 |

| | | |
|---------|---|-----|
| 3.2.2.1 | Erhebungsmethoden: Teilnehmende Beobachtung und Problemzentrierte Interviews | 94 |
| 3.2.2.2 | Aufbereitungsverfahren: Transkription und Konstruktion deskriptiver Systeme | 94 |
| 3.2.2.3 | Auswertungsverfahren: Grounded Theory und Qualitative Inhaltsanalyse | 95 |
| 3.2.2.4 | Fazit | 98 |
| 3.2.3 | Untersuchungsdesign | 99 |
| 3.2.3.1 | Klassentypen und Unterrichtsszenarien | 101 |
| 3.2.3.2 | Untersuchungsmethodik | 106 |
| 3.2.3.3 | Leitfadeninterviews | 107 |
| 3.2.3.4 | Datensammlung | 110 |
| 3.2.4 | Durchführung | 111 |
| 3.2.5 | Auswertung | 112 |
| 3.2.5.1 | Aufbereitung der Daten | 112 |
| 3.2.5.2 | Darstellung der Ergebnisse | 112 |
| 3.2.5.3 | Zusammenfassung und Interpretation der Ergebnisse: Wie kann aus einem Zeichengerät ein Instrument der Wissens- vermittlung werden (didaktische Idee)? (Forschungsfrage 4) . | 151 |
| 3.2.6 | Fazit | 154 |
| 3.2.6.1 | Konsequenzen für das Modell der Semiotischen Vermittlung . | 155 |
| 3.2.6.2 | Konsequenzen für das Modell der Instrumentellen Genese ... | 155 |
| 3.2.6.3 | Fazit: Das Modell der Instrumentellen Wissensaneignung im Kontext der Semiotischen Vermittlung und der Instrumentellen Genese unter Berücksichtigung des Ideenkonglomerats | 160 |
| 3.3 | Empirische Untersuchung des Pantographen von Scheiner | 162 |
| 3.3.1 | Untersuchungsdesign | 162 |
| 3.3.1.1 | Klassentypen und Unterrichtsszenarien | 162 |
| 3.3.2 | Datensammlung und Durchführung | 166 |
| 3.3.3 | Auswertung | 167 |
| 3.3.3.1 | Darstellung der Ergebnisse des Unterrichtseinsatzes des realen Pantographen (Kurstyp A) | 167 |
| 3.3.3.2 | Darstellung der Ergebnisse des Unterrichtseinsatzes des digitalen Pantographen (Kurstyp B) | 174 |
| 3.3.3.3 | Interpretation Die Pantographen-Ergebnisse und ihre Konsequenzen für die Frage, wie aus einem Zeichengerät ein Instrument der Wissensvermittlung werden kann (didaktische Idee)? (Forschungsfrage 4) | 179 |
| 3.3.4 | Fazit | 180 |
| 3.4 | Ergebnisse der Untersuchung des Parabelzirkel- und Pantographeneinsatzes . | 182 |
| 3.4.1 | Das Zeichengerät als Ideenkonglomerat | 182 |
| 3.4.2 | Das Ideenkonglomerat im Kontext der Semiotischen Vermittlung (Forschungsfrage 1) | 183 |

| | | |
|--|--|-----|
| 3.4.3 | Das Ideenkonglomerat im Kontext der Instrumentellen Genese (Forschungsfrage 2) | 184 |
| 3.4.4 | Instrumentelle Wissensaneignung bei realen und bei digitalen Zeichengeräten (Forschungsfrage 3) | 185 |
| 3.4.5 | Zeichengeräte als Instrumente der Wissensvermittlung (Forschungsfrage 4) | 187 |
| 3.4.5.1 | Die Erforschung von Zeichengeräten aus Sicht der Schüler .. | 188 |
| 3.4.5.2 | Zeichengeräte als Instrumente der Wissensvermittlung – ein Blick auf die Theorie der Repräsentationsmodi | 189 |
| 3.4.5.3 | Zeichengeräte als Instrumente der Wissensvermittlung und ihre möglichen Bezüge zum Modellieren | 193 |
| 3.5 | Mathematik-didaktische Ziele der Erforschung von Zeichengeräten | 195 |
| 3.5.1 | Von praktischen Tätigkeiten zu theoretischen Überlegungen und Einsichten (Schwerpunkt 1) | 196 |
| 3.5.2 | Von materiellen Objekten (real bzw. digital) über mentale Objekte zu idealen Objekten (Schwerpunkt 2) | 199 |
| 3.5.3 | Von Vermutungen über Argumente hin zum Beweis (Schwerpunkt 3) . | 199 |
| 3.5.4 | Zusammenfassung | 200 |
| Kapitel 4: Instrumentelle Wissensaneignung | | |
| | Ein Modell für das Lernen mit Zeichengeräten im Mathematikunterricht | 203 |
| 4.1 | Die Ausgangssituation | 203 |
| 4.1.1 | Die theoretischen Grundlagen | 203 |
| 4.1.2 | Forschungsfragen und Untersuchungsansatz | 204 |
| 4.1.3 | Das Untersuchungsdesign | 204 |
| 4.2 | Zusammenfassung der Untersuchungsergebnisse | 205 |
| 4.2.1 | Zeichengeräte als Ideenkonglomerate verstehen | 206 |
| 4.2.2 | Der Einfluss des Ideenkonglomerats auf die Zeichengene- se (Forschungsfrage 1) | 207 |
| 4.2.3 | Der Einfluss des Ideenkonglomerats auf die Instrumentelle Gene- se (Forschungsfrage 2) | 208 |
| 4.2.4 | Vergleich der Instrumentellen Wissensaneignung bei einem realen und einem digitalen Gerät (Forschungsfrage 3) | 211 |
| 4.2.5 | Wie gelingt es, dass aus einem Zeichengerät ein Instrument der Wissensvermittlung wird? (Forschungsfrage 4) | 213 |
| 4.3 | Schlussfolgerungen | 216 |
| 4.3.1 | Mathematik-didaktische Bedeutung der Ergebnisse | 216 |
| 4.3.2 | Weitergehende Überlegungen mit Blick auf das Lernen im Mathematikunterricht | 219 |
| | Literaturverzeichnis | 223 |
| | Abbildungsnachweis | 235 |

Einleitung

In der Menschheitsgeschichte spielen immer wieder Werkzeuge, ihre Erfindung und ihr Einsatz eine entscheidende Rolle. Diese Erkenntnis drückt sich selbst in der Einteilung der Geschichte aus.

„Die Einteilung der Frühzeit der europäischen Menschheitsgeschichte in Steinzeit, Kupferzeit, Bronzezeit und Eisenzeit zeigt die zentrale Rolle von Werkstoffen für Mensch und Gesellschaft. Jede dieser Perioden ist mit der Entwicklung von Gegenständen und neuen Herstellungstechniken von Werkzeugen verknüpft, die zum Fortschritt des Menschen beigetragen haben ...“¹

Daher hängen die Entwicklung des Menschen, seine Kultur und Denkweisen aufs Engste mit der Erfindung von Werkzeugen zusammen.

„Man’s use of mind is dependent upon his ability to develop and use »tools« or »instruments« or »technologies« that make it possible for him to express and amplify his powers.“²

Diese prägende Bedeutung der Werkzeugentwicklung und des Werkzeugeinsatzes wurde bereits von ERNST KAPP in seinem Werk „Grundlinien einer Philosophie der Technik. Zur Entstehungsgeschichte der Cultur aus neuen Gesichtspunkten“ aus dem Jahr 1877 vertreten. In dem folgenden Zitat von EDMUND REITLINGER, das sich dort auf der Titelseite findet, ist eine Art Leitperspektive zu sehen, denn KAPP stellt es auf diese Weise seinem ganzen Buch voran:

„Die ganze Menschengeschichte, genau geprüft, löst sich zuletzt in die Geschichte der Erfindung besserer Werkzeuge auf.“³

Auch in der Mathematik und für den Mathematikunterricht wurden immer wieder Werkzeuge erfunden und verwendet. Im Folgenden konzentrieren wir uns auf Zeichengeräte und gehen der Frage nach, welche Bedeutung historische Geräte für den heutigen Mathematikunterricht haben können. Wie kann ein Zeichengerät eingesetzt werden und was und wie können Schüler dabei lernen?⁴

¹ Handge/Öttinger 2006, S. 123f.

² Bruner 1971, S. 24.

³ Kapp 1877, Titelseite.

⁴ Siehe auch van Randenborgh 2013b.

J.S. BRUNER formuliert mit Blick auf den Mathematikunterricht:

„We would suggest that learning mathematics reflects a good deal about intellectual development. It begins with instrumental activity, a kind of definition of things by doing them.“⁵

Ein Beispiel für eine solche »instrumentale Aktivität« ist das Arbeiten mit einem Zeichengerät.

Eine neue, weiterführende Perspektive ergibt sich, wenn ein Zeichengerät als **Ideenkonglomerat** unterschiedlicher Ideen, wie z.B. der mechanischen oder der mathematischen Idee, verstanden wird. Diese Perspektive wird in **Kapitel 1** näher erläutert.⁶

In der hier vorliegenden empirischen Studie wurde der Einsatz des Parabelzirkels von FRANS VAN SCHOOTEN (1615–1660) und des Pantographen von CHRISTOPH SCHEINER (1573–1650) im Mathematikunterricht untersucht. Den Schülerinnen und Schülern⁷ standen zur Erforschung einerseits reale Nachbauten und andererseits digitale Simulationen (mit GeoGebra) zur Verfügung. Die Ergebnisse wurden im Rahmen der *Instrumentellen Genese* und der *Semiotischen Vermittlung* analysiert und interpretiert. Diese grundlegenden theoretischen Ansätze sind in **Kapitel 2** dargestellt. Der Ablauf der empirischen Untersuchung, die eingesetzten Materialien, Beobachtungen und Interpretationen finden sich in **Kapitel 3**. Dort werden auch die Lernprozesse und Wege der Instrumentellen Genese beim Einsatz eines realen Modells mit denen beim Einsatz eines digitalen Nachbaus verglichen. Dieses ist auch mit Blick auf das in den *NCTM Principles and Standards for School Mathematics* formulierte „Technology Principle“ interessant. Dieses richtet sich auf den Einsatz von neuen Medien, gilt aber sicherlich nicht nur für diese.

„The Technology Principle

Technology is essential in teaching and learning mathematics; it influences the mathematics that is taught and enhances students' learning.

Electronic technologies – calculators and computers – are essential tools for teaching, learning, and doing mathematics. They furnish visual images of mathematical ideas, they facilitate organizing and analyzing data, and they compute efficiently and accurately. They can support investigation by students in every area of mathematics, including geometry, statistics, algebra, measurement, and number. When technological tools are available, students can focus on decision making, reflection, reasoning, and problem solving.“⁸

⁵ Bruner 1971, S. 68.

⁶ Vgl. auch van Randenborgh 2012a.

⁷ Im Folgenden wird – aus Gründen der besseren Lesbarkeit – nur noch von Schülern gesprochen. Damit sind weibliche und männliche Personen gemeint.

⁸ NCTM 2000, S. 24.

Die hier angesprochenen Möglichkeiten sind aber nur gegeben, wenn das Werkzeug im Unterricht entsprechend eingesetzt wird. Mit Blick auf einen solchen Einsatz hebt WEIGAND zwei Dinge hervor:

„Für den adäquaten Werkzeugeinsatz bedarf es sowohl der Kenntnisse der Funktionsweise des Werkzeugs als auch Vorstellungen darüber, wie sich die zu bearbeitende Situation verändern soll.“⁹

Bei der Erforschung eines historischen Zeichengeräts können Schüler sowohl die Funktionsweise des Geräts aufdecken, als auch Vorstellungen über seine Einsatzmöglichkeiten entwickeln. Allerdings liegt der Schwerpunkt unserer Untersuchung auf dem Entdecken des Zeichengeräts und der in ihm enthaltenen Ideen – insbesondere der mathematischen Idee. Es geht also nicht oder nur in zweiter Linie um den praktischen Einsatz des Geräts selbst.

Bei der Gestaltung der Lernumgebung, der Arbeitsaufträge und des Unterrichts wurde darauf geachtet, entdeckendes – ja geradezu forschendes – Lernen zu ermöglichen. Hier stellt das zu untersuchende Zeichengerät selbst die zu entdeckende Mathematik bereit, und es kann daher als *äußerer Impuls* im Sinne WINTERS verstanden werden.

„Entdeckendes Lernen ist weniger die Beschreibung einer Sorte von beobachtbaren Lernvorgängen, sondern ein theoretisches Konstrukt, die Idee nämlich, daß Wissenserwerb, Erkenntnisfortschritt und die Ertüchtigung in Problemlösefähigkeiten nicht schon durch Information von außen geschieht, sondern durch eigenes aktives Handeln unter Rekurs auf die schon vorhandene kognitive Struktur, allerdings in der Regel angeregt und somit erst ermöglicht durch äußere Impulse.“¹⁰

In unserer empirischen Untersuchung ließen sich dabei bestimmte Prozesse und Lernwege feststellen. Auf diese Weise gelang es, eine Zuordnung der Schüler nach bestimmten *Instrumentalisationstypen* vorzunehmen.

Auf Grund dieser Ergebnisse wurde das Modell der *Instrumentellen Wissensaneignung*¹¹ entwickelt und in den mathematik-didaktischen Kontext eingeordnet.

Die sich daraus ergebenden Konsequenzen für die theoretischen Modelle sowie didaktischen Ideen und Ziele des Einsatzes von historischen Zeichengeräten im Mathematikunterricht werden in **Kapitel 4** thematisiert.

Insgesamt zeigt das vorliegende Buch, dass für den Prozess der Instrumentellen Genese das Aufdecken, Erforschen und Erklären von *Grenzen, Zwängen und Möglichkeiten* des Geräts entscheidend ist. Diese besonderen Eigenschaften leiten die Untersuchung des Zeichengeräts durch die Schüler und bestimmen so deren Lernprozess. Mit Hilfe der Semiotik lassen sich dabei *unterschiedliche Zeichenkategorien* feststellen, die für bestimmte Bearbeitungsphasen der Schüler charakteristisch waren. Eine besondere Bedeutung kam dabei den *Trägerzeichen* zu. Diese weiterführenden Zeichen bestimmten die darauffolgende Schülertätigkeit. Die Entstehung der verschiedenen Zeichen und Zeichenkategorien sowie

⁹ Weigand 2004, S. 5.

¹⁰ Winter 1991, S. 1. Zitiert nach: http://madipedia.de/wiki/Entdeckendes_Lernen

¹¹ Vgl. auch van Randenborgh 2012b.

der Prozess der Instrumentellen Genese konnte mit dem in diesem Buch entwickelten Verständnis eines Zeichengeräts als Ideenkonglomerat erklärt werden. Diese Auffassung war auch zentral bei der Erklärung von – bei der empirischen Untersuchung festgestellten – Gemeinsamkeiten und Unterschieden beim Einsatz eines realen bzw. digitalen Nachbaus eines Zeichengeräts.

Wird im Mathematikunterricht aus einem Zeichengerät ein Instrument der Wissensvermittlung, dann findet ein Prozess der Instrumentellen Wissensaneignung statt. Die hier gewonnenen Einsichten zeigen Bezüge zu den bekannten Modellierungskreisläufen bzw. *Modellierungsabläufen*. Sie werfen auch neue Untersuchungsfragen z.B. mit Blick auf den Einsatz von mathematikhaltigen Medien und einer entsprechenden *Medialen Wissensaneignung* auf.

Was sind historische Zeicheninstrumente?

1

Als historische Instrumente bezeichnen wir Instrumente, die aus der Vergangenheit stammen. An dieser Stelle soll nicht eingehend diskutiert werden, wann ein Instrument als historisch anzusehen ist. Es geht vielmehr darum, Kriterien dafür zu entwickeln, wann man von einem *Instrument* sprechen kann.

1.1 Was ist ein Instrument?

Zunächst ist es sinnvoll und üblich, Instrumente nach ihrem *Verwendungsbereich* zu unterteilen. Beispielsweise kann man von Musikinstrumenten sprechen und diese weiter einteilen nach ihrer *Verwendungsart* oder ihrem Verwendungszweck. So gibt es Blasinstrumente, Streichinstrumente etc. Auch im Bereich der Medizin kann man medizinische Instrumente unterteilen, z.B. in chirurgische Instrumente, HNO-Instrumente etc.

Für *mathematische Instrumente* gibt es entsprechende Einteilungen. So ist es gebräuchlich von Instrumenten zum Rechnen und Instrumenten zum Zeichnen zu sprechen.¹² Außerdem kann man noch Instrumente zum Messen unterscheiden.¹³

Darüber hinaus kann man dann – je nach Verwendungsart – weitere Spezifizierungen vornehmen (s.u. *Einsatzidee*).

In der vorliegenden Untersuchung geht es um *Zeicheninstrumente*. Daher beziehen sich die weiteren Ausführungen auch nur auf diese.

1.2 Welche Kriterien muss ein mathematisches Instrument erfüllen, um als Zeicheninstrument bezeichnet werden zu können?

In Anlehnung an VOLLRATH¹⁴ können die folgenden sechs Kriterien bzw. Ideen aufgeführt werden.

1. Einsatzidee:

Besteht ein wesentliches Ziel der Anwendung des Instruments darin, dass es zum Zeichnen eingesetzt werden kann, dann ist seine Einsatzidee das Zeichnen. Eine feinere Unterteilung dieser Instrumente nach dem „Wie“ und dem „Was“ des Zeichnens ergibt etwa¹⁵:

¹² Vgl. z.B. Vollrath/Weigand/Weth 2000, S. 123f.

¹³ Vgl. auch Vollrath 2013.

¹⁴ Vollrath 2003, S. 256ff. Vgl. auch van Randenborgh 2012b.

¹⁵ Vgl. dazu auch Bartolini Bussi/Pergola 1996, S. 45: „pantographs“ und „curvigraphs“.