

# HANSER



## Leseprobe

zu

# Grundlagen der Nachrichtentechnik

## Übertragungstechnik und Signalverarbeitung

Mit 278 Bildern, 24 Tabellen und 48 Beispielen

von Carsten Roppel

ISBN (Buch): 978-3-446-45324-1

ISBN (E-Book): 978-3-446-45695-2

Weitere Informationen und Bestellungen unter

<http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-45324-1>

sowie im Buchhandel

© Carl Hanser Verlag, München

# Vorwort

Nachrichten werden in technischer Hinsicht durch Signale dargestellt. Die Erzeugung, die Übertragung und der Empfang dieser Signale ist daher eine wesentliche Grundlage der Nachrichtentechnik. Mit diesen Aspekten befasst sich das vorliegende Buch, wobei der Schwerpunkt gemäß ihrer technischen Bedeutung auf den digitalen Übertragungssystemen liegt. Dabei spielen oft spezielle Filterfunktionen eine wichtige Rolle. Fragt man sich dann, wie beispielsweise ein Kosinus-roll-off-Filter oder ein signalangepasstes Filter implementiert wird, so begibt man sich auf das Gebiet der digitalen Signalverarbeitung. Daher geht das Buch auch auf die für die Nachrichtentechnik wichtigen Aspekte der digitalen Signalverarbeitung ein. Für die Kommunikationssysteme wie Internet oder Mobilfunk, die wir heute intensiv nutzen, ist die Übertragungstechnik ein ganz wesentlicher Baustein. Aber es werden auch Vermittlungstechnik und Datenübertragungsprotokolle benötigt, deren Grundlagen ebenfalls in knapper Form behandelt werden.

Um den Stoff zu vertiefen, gibt es zu jedem Kapitel einige Übungsaufgaben. Beim selbstständigen Bearbeiten der Aufgaben ist es wichtig, die eigenen Ergebnisse kontrollieren zu können, daher stehen die Lösungen dazu im Anhang. Eine große Bedeutung hat heute die Simulation, mit deren Hilfe nicht nur kompliziertere Fragestellungen bearbeitet werden können. Die den Simulationen zugrunde liegenden zeitdiskreten Modelle bilden häufig eine hard- oder softwarebasierte Implementierung eins zu eins ab. Sie können daher auch der Überprüfung einer solchen Implementierung oder der automatischen Codegenerierung dienen. Daher werden auf der Internetseite zum Buch Übungen mit den Simulationstools MATLAB und Scilab beschrieben.

Der vorliegende Text basiert teilweise auf dem Buch *Grundlagen der digitalen Kommunikationstechnik* (Hanser-Verlag, 2006). Dessen Inhalt wurde jedoch so stark überarbeitet und völlig neu strukturiert, dass das vorliegende Buch den neuen Titel *Grundlagen der Nachrichtentechnik* bekommen hat.

Ich bedanke mich bei dem Team des Carl Hanser Verlages Franziska Jacob, Franziska Kaufmann und Manuel Leppert für zahlreiche Anregungen zum Konzept und zur Gestaltung des Buches sowie ihre Hilfe bei inhaltlichen und technischen Fragen. Und ich bedanke mich bei meiner Frau, die ganz wesentlich zur richtigen Rechtschreibung beigetragen hat.

Schmalkalden, im Mai 2018

Carsten Roppel

Internetseite mit Begleitmaterialien zum Buch:

<http://www.hs-schmalkalden.de/nachrichtentechnik>

# Inhalt

<b>1</b>	<b>Einführung</b> .....	<b>11</b>
1.1	Nachrichtentechnik – ein Überblick .....	11
1.2	Digitale und analoge Übertragung .....	13
1.3	Standardisierung .....	16
1.4	Zum Inhalt dieses Buches .....	17
<b>2</b>	<b>Signalübertragung</b> .....	<b>19</b>
2.1	Lineare zeitinvariante Systeme .....	19
2.1.1	Impulsantwort und Faltung .....	20
2.1.2	Fourier-Transformation .....	25
2.1.3	Übertragungsfunktion .....	31
2.1.4	Verzerrungsfreies System .....	35
2.1.5	Der ideale Tiefpass .....	37
2.1.6	Der ideale Bandpass .....	38
2.2	Energie- und Leistungssignale .....	39
2.2.1	Normierte Energie und normierte Leistung .....	39
2.2.2	Korrelation von Energie- und Leistungssignalen .....	40
2.2.3	Energie- und Leistungsdichtespektrum .....	42
2.3	Zufallssignale .....	44
2.3.1	Beschreibung von Zufallssignalen durch Erwartungswerte .....	45
2.3.2	Verteilungsfunktion und Wahrscheinlichkeitsdichte .....	47
2.3.3	Leistungsdichtespektrum von Zufallssignalen .....	54
2.3.4	Übertragung von Zufallssignalen über LTI-Systeme .....	57
2.3.5	Weißes Rauschen, Rauschbandbreite und additives Rauschen .....	59
2.4	Weiterführende Hinweise .....	64
2.5	Übungsaufgaben .....	64
<b>3</b>	<b>Signalabtastung und Quantisierung</b> .....	<b>66</b>
3.1	Abtasttheorem .....	66
3.2	Abtastung von Bandpasssignalen .....	72
3.3	Lineare Quantisierung .....	75

---

3.4	Nichtlineare Quantisierung und Pulsmodemodulation (PCM) .....	78
3.5	Weiterführende Hinweise .....	82
3.6	Übungsaufgaben .....	82
<b>4</b>	<b>Digitale Signalverarbeitung in der Nachrichtentechnik.....</b>	<b>84</b>
4.1	Zeitdiskrete Signale und Systeme .....	84
4.1.1	Energie, Leistung und Korrelationsfunktion .....	85
4.1.2	Diskrete Faltung .....	87
4.1.3	Fourier-Transformation zeitdiskreter Signale .....	90
4.1.4	Diskrete Fourier-Transformation .....	92
4.2	Digitale Filter .....	97
4.3	Weiterführende Hinweise .....	106
4.4	Übungsaufgaben .....	107
<b>5</b>	<b>Digitale Nachrichtenübertragung im Basisband .....</b>	<b>108</b>
5.1	Basisbandsignale und Leitungscodes.....	108
5.2	Intersymbol-Interferenz und Nyquist-Pulsformung .....	112
5.2.1	Nyquist-Bandbreite .....	112
5.2.2	Das erste Nyquist-Kriterium .....	113
5.2.3	Kosinus-roll-off-Filter .....	115
5.2.4	Das Augendiagramm .....	118
5.2.5	Leistungsdichtespektrum digitaler Basisbandsignale .....	120
5.3	Fehlerwahrscheinlichkeit .....	124
5.3.1	Fehlerwahrscheinlichkeit bei binärer Übertragung .....	124
5.3.2	Signalangepasstes Filter .....	128
5.3.3	Fehlerwahrscheinlichkeit bei Mehrpegelübertragung .....	133
5.4	Kanalverzerrungen .....	137
5.4.1	Symboltaktentzerrer.....	137
5.4.2	Entzerrer mit Doppelabtastung .....	140
5.4.3	Vergleich der verschiedenen Empfängerkonzepte .....	144
5.4.4	Adaptive Entzerrung .....	145
5.5	Scrambling .....	147
5.6	Synchronisation .....	151
5.6.1	Symboltaktsynchronisation .....	151
5.6.2	Rahmensynchronisation .....	154
5.7	Weiterführende Hinweise .....	156
5.8	Übungsaufgaben .....	157

<b>6</b>	<b>Modulationsverfahren .....</b>	<b>158</b>
6.1	Bandpasssignale .....	159
6.1.1	Bandpasssignal und äquivalentes Tiefpasssignal .....	159
6.1.2	Äquivalentes Tiefpasssystem .....	163
6.1.3	Leistungsdichtespektrum von Bandpassrauschen .....	167
6.2	Analoge Modulationsverfahren .....	168
6.2.1	Amplitudenmodulation .....	169
6.2.2	Frequenz- und Phasenmodulation .....	176
6.3	Digitale Modulationsverfahren .....	186
6.3.1	Quadraturmodulator .....	186
6.3.2	Amplitudenumtastung .....	188
6.3.3	Phasenumtastung .....	190
6.3.4	Quadratur-Amplitudenmodulation .....	195
6.3.5	Frequenzumtastung .....	197
6.4	Demodulation und Fehlerwahrscheinlichkeit digitaler Modulationsverfahren ..	206
6.4.1	Kohärente Demodulation .....	207
6.4.2	Inkohärente Demodulation .....	219
6.5	Entzerrung von Bandpasssignalen .....	225
6.6	Multiträgersysteme und Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM)	226
6.7	Empfängerarchitekturen .....	234
6.8	Weiterführende Hinweise .....	237
6.9	Übungsaufgaben .....	238
<b>7</b>	<b>Kanalcodierung .....</b>	<b>240</b>
7.1	Kanalkapazität .....	241
7.2	Blockcodes .....	244
7.2.1	Eigenschaften von Blockcodes .....	244
7.2.2	Hamming-Codes .....	248
7.2.3	Codiergewinn .....	252
7.2.4	Zyklische Codes .....	253
7.3	Faltungscodes .....	259
7.3.1	Codierung .....	260
7.3.2	Viterbi-Decodierung .....	264
7.3.3	Decodierung mit/ohne Zuverlässigkeitsinformation .....	268
7.4	Interleaving .....	270
7.5	Turbo-Codes und LDPC-Codes .....	273
7.6	Weiterführende Hinweise .....	275
7.7	Übungsaufgaben .....	276

<b>8</b>	<b>Kommunikationsnetze</b> .....	<b>277</b>
8.1	Das OSI-Referenzmodell .....	277
8.2	Mehrfachzugriffsverfahren.....	280
8.2.1	Prinzipien des Mehrfachzugriffs.....	280
8.2.2	Dezentrale Zugriffssteuerung .....	284
8.3	Leitungs- und Paketvermittlung.....	288
8.4	Zuverlässige Datenübertragung .....	294
8.5	Weiterführende Hinweise .....	298
8.6	Übungsaufgaben .....	299
	<b>Anhang</b> .....	<b>301</b>
	Anhang 1: Kleine Formelsammlung.....	301
	Anhang 2: Tabellen und Theoreme der Fourier-Transformation .....	304
	Anhang 3: Die Hilbert-Transformation .....	307
	Anhang 4: Die erfc-Funktion .....	309
	Anhang 5: Lösungen zu den Übungsaufgaben .....	311
	<b>Verzeichnis der Beispiele</b> .....	<b>321</b>
	<b>Verzeichnis der Symbole und Formelzeichen</b> .....	<b>323</b>
	<b>Abkürzungsverzeichnis</b> .....	<b>325</b>
	<b>Literatur</b> .....	<b>327</b>
	<b>Index</b> .....	<b>331</b>

# 2

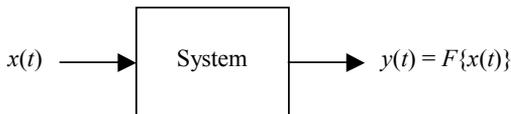
## Signalübertragung

Ein Signal ist die physikalische Darstellung einer Nachricht z. B. in Form einer elektrischen Spannung oder einer akustischen oder elektromagnetischen Welle. In diesem Kapitel gehen wir der Frage nach, wie sich ein Signal bei der Übertragung über ein System wie den Übertragungskanal oder ein Filter verhält. Sehr viele dieser Systeme gehören zur Klasse der linearen zeitinvarianten Systeme. Diese Systeme werden im Zeitbereich mithilfe der Impulsantwort und im Frequenzbereich mithilfe der Übertragungsfunktion beschrieben. Wichtige Werkzeuge in diesem Zusammenhang sind die Faltung und die Fourier-Transformation.

Nachrichtentragende Signale sind Zufallssignale, im Gegensatz zu deterministischen Signalen wie beispielsweise einem Sinussignal. Ein deterministisches Signal ist vollständig bekannt, eine Übertragung ist daher gar nicht notwendig! Die Beschreibung von Zufallssignalen mithilfe der Korrelation und des Leistungsdichtespektrums bildet eine weitere Grundlage für die Analyse von Übertragungssystemen.

### ■ 2.1 Lineare zeitinvariante Systeme

Wir betrachten ein System mit einem Eingang und einem Ausgang. Das System reagiert auf ein Eingangssignal  $x(t)$  mit dem Ausgangssignal  $y(t)$ . Der funktionale Zusammenhang zwischen Eingang und Ausgang wird durch  $y(t) = F\{x(t)\}$  beschrieben (Bild 2.1).



**Bild 2.1** Ein System

Ein System ist linear, wenn für eine Linearkombination von Eingangssignalen  $x_i(t)$  die Linearkombination der entsprechenden Ausgangssignale  $y_i(t) = F\{x_i(t)\}$  zu beobachten ist:

$$x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + \dots = \sum_i a_i x_i(t) \quad (2.1)$$
$$y(t) = a_1 F\{x_1(t)\} + a_2 F\{x_2(t)\} + \dots = \sum_i a_i F\{x_i(t)\}$$

So ist ein System mit  $F\{x(t)\} = 2x(t)$  linear, während ein System mit  $F\{x(t)\} = x^2(t)$  nichtlinear ist und Gl. (2.1) nicht gilt. Ein System ist zeitinvariant, wenn dessen Eigenschaften unabhängig von der Zeit sind. Für ein zeitverschobenes Eingangssignal  $x(t - t_0)$  ist dann das entsprechende zeitverschobene Ausgangssignal zu beobachten:

$$F\{x(t - t_0)\} = y(t - t_0) \quad (2.2)$$

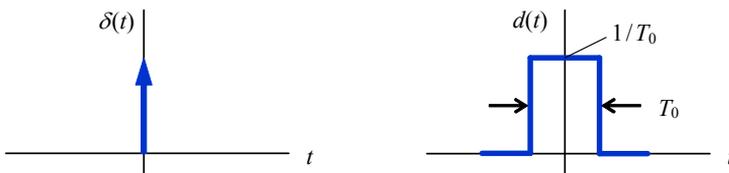
In diesem Fall spricht man von linearen zeitinvarianten Systemen oder kurz LTI-Systemen (Linear Time-Invariant, LTI). Beispiele für LTI-Systeme sind analoge und digitale Filter, ein Integrator oder ein Verzögerungsglied. Viele reale Systeme verhalten sich bei Ansteuerung mit Signalen kleiner Amplitude linear, während bei Signalen großer Amplitude nichtlineare Effekte auftreten. Ein Beispiel für ein *zeitvariantes* System ist ein Funkkanal zu einem beweglichen Empfänger, etwa einem Fußgänger, Rad- oder Autofahrer. Aufgrund der Bewegung des Empfängers ändern sich die Eigenschaften des Kanals mit der Zeit, und Gl. (2.2) gilt nicht.

### 2.1.1 Impulsantwort und Faltung

Zur Beschreibung eines LTI-Systems im Zeitbereich dient die Impulsantwort  $h(t)$ . Die Impulsantwort ist die Reaktion des Systems auf einen Dirac-Impuls  $\delta(t)$  am Eingang, d. h.  $h(t) = F\{\delta(t)\}$ . Der Dirac<sup>1</sup>-Impuls ist eine verallgemeinerte Funktion, die durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1, \quad \delta(t) = 0 \quad \text{für } t \neq 0 \quad (2.3)$$

definiert ist. Umgangssprachlich kann man den Dirac-Impuls als einen unendlich schmalen Impuls mit der Fläche 1 beschreiben, dessen Wert zum Zeitpunkt  $t = 0$  undefiniert ist.  $\delta(t)$  hat die Einheit 1/s. Der Impuls wird grafisch durch einen senkrechten Pfeil dargestellt. Messtechnisch kann der Dirac-Impuls durch einen schmalen Rechteckimpuls  $d(t)$  der Breite  $T_0$ , der Höhe  $1/T_0$  und der Fläche 1 näherungsweise realisiert werden (Bild 2.2).



**Bild 2.2** Dirac-Impuls und messtechnische Realisierung durch schmalen Rechteckimpuls

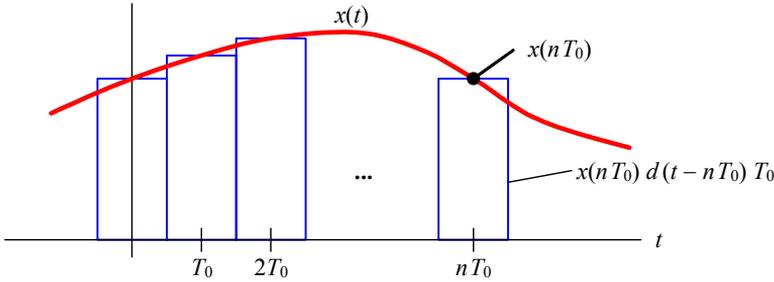
Ein beliebiges Signal  $x(t)$  kann durch eine Folge von Rechteckimpulsen approximiert werden, siehe Bild 2.3.  $x(nT_0) d(t - nT_0) T_0$  ist ein Rechteckimpuls an der Stelle  $t = nT_0$  und der Höhe  $x(nT_0)$ . Durch Aufsummieren der Rechteckimpulse erhält man:

$$x(t) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_0) d(t - nT_0) T_0 \quad (2.4)$$

Die Approximation wird offensichtlich umso besser, je schmaler die Rechteckimpulse sind. Lässt man  $T_0$  gegen null gehen, so geht der Rechteckimpuls in einen Dirac-Impuls und die Summe in Gl. (2.4) in ein Integral über. Mit den Bezeichnungen  $T_0 \rightarrow d\tau$  sowie  $nT_0 \rightarrow \tau$  erhält man den Ausdruck:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(t) * \delta(\tau) \quad (2.5)$$

<sup>1</sup> Paul A. M. Dirac (1902–1984), britischer Physiker.



**Bild 2.3** Approximation eines Signals  $x(t)$  durch eine Folge von Rechteckimpulsen

Das Integral in Gl. (2.5) bezeichnet man als Faltungsintegral; der Operator "\*" (lies: gefaltet mit) ist eine abkürzende Schreibweise dafür. Wenden wir diese Beziehung auf ein LTI-System an, so erhalten wir mit den Eigenschaften der Linearität, Gl. (2.1), und der Zeitinvarianz, Gl. (2.2):

$$\begin{aligned}
 y(t) = F\{x(t)\} &= F\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau) d\tau \right\} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)F\{\delta(t-\tau)\} d\tau && \text{(Linearität)} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau) d\tau && \text{(Zeitinvarianz)}
 \end{aligned}$$

Damit haben wir das folgende wichtige Ergebnis erhalten: Für ein beliebiges Eingangssignal  $x(t)$  erhält man das Ausgangssignal  $y(t)$  eines LTI-Systems durch Faltung von  $x(t)$  mit der Impulsantwort  $h(t)$ :

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau) d\tau \tag{2.6}$$

Der Name Faltung (engl.: convolution) kommt daher, dass man  $h(-\tau)$  aus  $h(\tau)$  erhält, indem man  $h(\tau)$  an der y-Achse faltet oder spiegelt (siehe auch Beispiel 2.2). Wie bei der Multiplikation gelten für die Faltung das Kommutativ-, Assoziativ- und das Distributivgesetz (für einen Beweis siehe z. B. [22]):

$$\begin{aligned}
 x(t) * y(t) &= y(t) * x(t) \\
 [x(t) * y(t)] * z(t) &= x(t) * [y(t) * z(t)] \\
 x(t) * [y(t) + z(t)] &= [x(t) * y(t)] + [x(t) * z(t)]
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Aus der Definition Gl. (2.3) des Dirac-Impulses ergeben sich zwei häufig verwendete Beziehungen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0) dt = x(t_0) \quad (2.8)$$

$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0) \quad (2.9)$$

Gl. (2.8) beschreibt die Siebeigenschaft des Dirac-Impulses, d. h., der Wert von  $x(t)$  an der Stelle  $t = t_0$  wird herausgesiebt.  $\delta(t-t_0)$  ist außer bei  $t = t_0$  gleich null, daher ist  $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0) dt = x(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = x(t_0)$ , denn die Fläche des Dirac-Impulses ist 1. Gemäß Gl. (2.9) ergibt die Faltung eines Signals mit dem an die Stelle  $t_0$  verschobenen Dirac-Impuls das um  $t_0$  verschobene Signal  $x(t-t_0)$ . Ein System mit der Impulsantwort  $h(t) = \delta(t-t_0)$  wirkt also als Verzögerungsglied. Die Faltung in Gl. (2.9) wird berechnet, indem man das Faltungsintegral  $x(t) * \delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau-t_0) d\tau$  aufstellt. Hier ist  $\delta(t-\tau-t_0)$  außer bei  $\tau = t-t_0$  gleich null und man erhält – ähnlich der Überlegung zu Gl. (2.8) – die Lösung  $x(t-t_0)$ .

Die *Sprungantwort*  $g(t)$  eines Systems ist dessen Reaktion auf einen Einheitssprung  $u(t)$  am Eingang. Der Einheitssprung ist ein Signal, das zum Zeitpunkt  $t = 0$  von 0 auf 1 springt (für eine grafische Darstellung von  $u(t)$  siehe Bild 2.5 und Anhang 1). Die Impulsantwort ist die Ableitung der Sprungantwort:

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} \quad (2.10)$$

Dies folgt aus

$$g(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau) d\tau$$

$$\frac{dg(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \left( \frac{d}{dt} u(t-\tau) \right) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\delta(t-\tau) d\tau = h(t) * \delta(t) = h(t)$$

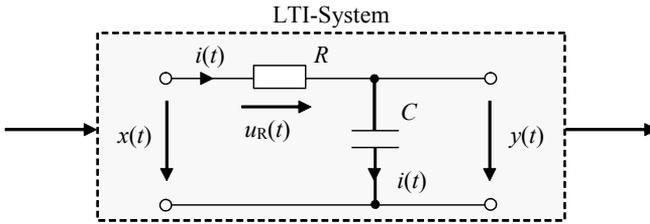
unter Anwendung des Kommutativgesetzes aus Gl. (2.7) sowie der Beziehung  $du(t)/dt = \delta(t)$ .

Da ein Einheitssprung messtechnisch einfacher erzeugt werden kann als ein Dirac-Impuls, wird die Impulsantwort oft über den Umweg der Sprungantwort bestimmt. Die folgenden beiden Beispiele sollen die Konzepte der Impulsantwort und der Faltung anhand eines einfachen, aber wichtigen Systems, des RC-Tiefpasses, verdeutlichen.

### Beispiel 2.1 Sprung- und Impulsantwort des RC-Tiefpasses

Bild 2.4 zeigt einen RC-Tiefpass mit dem Eingangssignal  $x(t)$  und dem Ausgangssignal  $y(t)$ .  $y(t)$  ist auch die Spannung an der Kapazität  $C$ . Der Strom durch  $C$  ist gegeben durch  $i(t) = C dy(t)/dt$ . Für das Ausgangssignal erhält man eine Differenzialgleichung erster Ordnung:

$$y(t) = x(t) - u_R(t) = x(t) - R i(t) = x(t) - RC \frac{dy(t)}{dt}$$



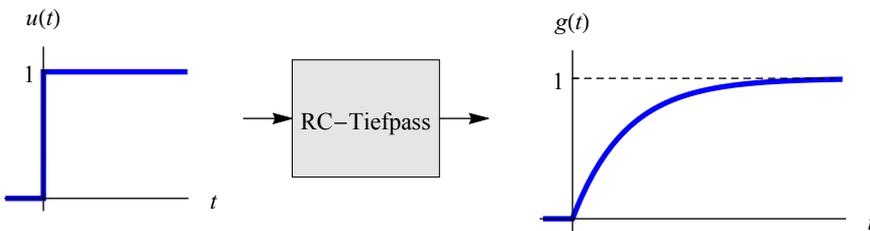
**Bild 2.4** Der RC-Tiefpass

Für  $x(t) = u(t) = 1$  und  $t \geq 0$  erhält man als Lösung die Sprungantwort (Bild 2.5)

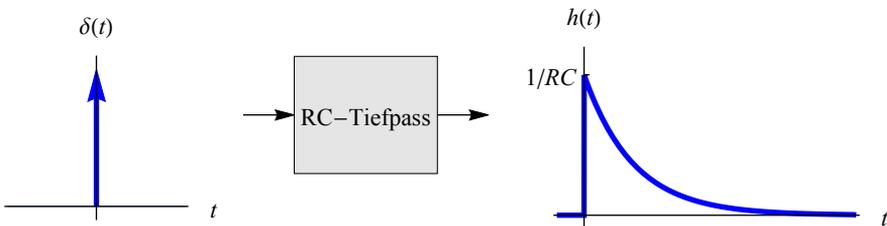
$$y(t) = g(t) = 1 - e^{-t/RC} \quad \text{für } t \geq 0 \tag{2.11}$$

wovon man sich durch Einsetzen in die Differenzialgleichung leicht überzeugen kann. Die Impulsantwort (Bild 2.6) erhalten wir schließlich durch Ableiten der Sprungantwort:

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \quad \text{für } t \geq 0 \tag{2.12}$$



**Bild 2.5** Sprungantwort  $g(t)$  des RC-Tiefpasses als Reaktion auf den Einheitssprung  $u(t)$



**Bild 2.6** Impulsantwort  $h(t)$  des RC-Tiefpasses als Reaktion auf den Einheitssprung  $\delta(t)$

Wenn die Impulsantwort eines Systems bekannt ist, können wir mithilfe von Gl. (2.6) die Reaktion des Systems auf beliebige deterministische Eingangssignale bestimmen. Als Beispiel dazu wollen wir die Reaktion des RC-Tiefpasses auf einen Rechteckimpuls am Eingang berechnen. Der Rechteckimpuls ist ein Signal, das uns noch oft begegnen wird und daher ein eigenes Symbol verdient. Wir verwenden  $\text{rect}(t)$ , die Definition lautet:

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{für } |t| > \frac{1}{2} \end{cases} \tag{2.13}$$

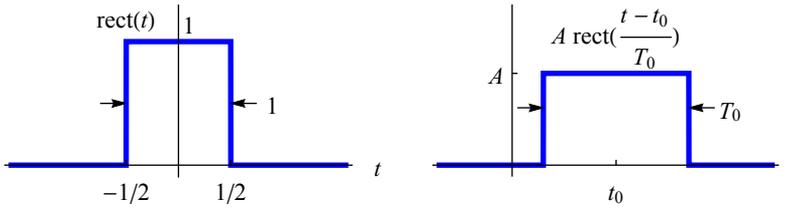


Bild 2.7 Der Rechteckimpuls

(Bild 2.7 links). Die Flanken des Impulses liegen bei  $t = \pm 1/2$ . Entsprechend beschreibt  $A \text{ rect}((t - t_0)/T_0)$  einen um  $t_0$  nach rechts verschobenen Rechteckimpuls der Amplitude  $A$  und der Breite  $T_0$  (Bild 2.7 rechts). Um die Position der Flanken dieses Impulses zu bestimmen, setzen wir  $(t - t_0)/T_0 = \pm 1/2$ . Daraus folgt, dass die Flanken bei  $t = t_0 \pm T_0/2$  liegen.

### Beispiel 2.2 Reaktion des RC-Tiefpasses auf einen Rechteckimpuls

Am Eingang des Tiefpasses aus Bild 2.4 liege nun das Signal  $x(t) = \text{rect}(t/T_0 - 1/2)$ . Dies ist ein Rechteckimpuls der Amplitude 1 und der Breite  $T_0$ , der bei  $t = 0$  beginnt. Für das Ausgangssignal gilt Gl. (2.6). Dabei ist  $\tau$  die Integrationsvariable, während  $t$  bezüglich der Integration ein konstanter Parameter ist.  $h(-\tau)$  erhält man durch Faltung von  $h(\tau)$  um die y-Achse, und  $h(t - \tau)$  ist zusätzlich um  $t$  verschoben.  $t > 0$  bewirkt eine Verschiebung nach rechts,  $t < 0$  nach links. Das Ausgangssignal zum Zeitpunkt  $t$ ,  $y(t)$ , ist gleich der Fläche unter  $x(\tau) \cdot h(t - \tau)$ , siehe Bild 2.8. Zur Berechnung von  $y(t)$  müssen drei Fälle unterschieden werden:

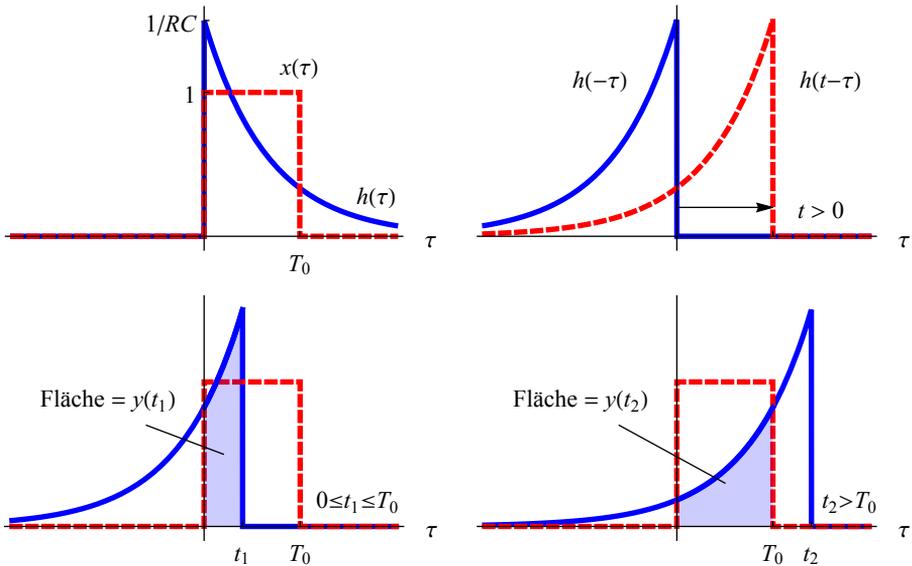
- 1. Fall:**  $t < 0$ . Für Verschiebungen  $t < 0$  überlappen sich  $x(\tau)$  und  $h(t - \tau)$  nicht, d. h., das Produkt  $x(\tau)h(t - \tau)$  ist null für alle  $\tau$ , und es ist  $y(t) = 0$ .
- 2. Fall:**  $0 \leq t \leq T_0$ . Für Verschiebungen im Bereich  $0 \leq t \leq T_0$  überlappen sich  $x(\tau)$  und  $h(t - \tau)$  im Intervall  $0 \leq \tau \leq t$ . In diesem Intervall ist  $x(\tau) = 1$ , und für  $y(t)$  folgt:

$$y(t) = \int_0^t \frac{1}{RC} e^{-(t-\tau)/RC} d\tau = \frac{1}{RC} [RC e^{-(t-\tau)/RC}]_0^t = 1 - e^{-t/RC}$$

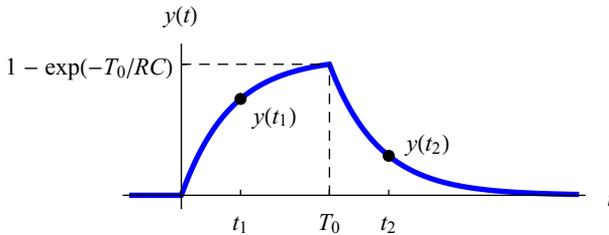
- 3. Fall:**  $t > T_0$ . Für Verschiebungen  $t > T_0$  überlappen sich  $x(\tau)$  und  $h(t - \tau)$  im Intervall  $0 \leq \tau \leq T_0$ , und wir erhalten entsprechend:

$$y(t) = \int_0^{T_0} \frac{1}{RC} e^{-(t-\tau)/RC} d\tau = (1 - e^{-T_0/RC}) e^{-(t-T_0)/RC}$$

Der gesamte Verlauf von  $y(t)$  ist in Bild 2.9 wiedergegeben.



**Bild 2.8** Faltung eines Rechteckimpulses der Breite  $T_0$  mit der Impulsantwort des RC-Tiefpasses



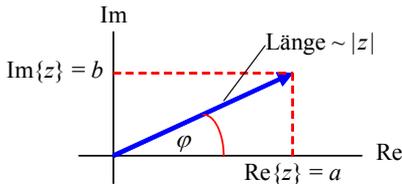
**Bild 2.9** Ausgangssignal  $y(t)$  des RC-Tiefpasses

### 2.1.2 Fourier-Transformation

Die Fourier<sup>2</sup>-Transformation dient der Beschreibung von Signalen und Systemen im Frequenzbereich. Die Beschreibungen im Zeit- und Frequenzbereich sind dabei gleichwertig; die Fourier-Transformation bietet aber eine neue Perspektive und damit neue Einsichten. Auch ist je nach Fragestellung die Lösung eines Problems in einem der Bereiche häufig wesentlich einfacher. Die Fourier-Transformierte eines Signals  $x(t)$  nennt man dessen Fourier-Spektrum  $S(f)$ , definiert als:

$$S(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \tag{2.14}$$

<sup>2</sup> Jean B. J. Fourier (1768–1830), französischer Mathematiker und Physiker.



**Bild 2.10** Betrag und Phase einer komplexen Größe

Umgekehrt erhält man  $x(t)$  durch Fourier-Rücktransformation von  $S(f)$ :

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{S(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df \quad (2.15)$$

$S(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$  und  $x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{S(f)\}$  sind symbolische Schreibweisen, oft werden dafür auch die Symbole  $S(f) \bullet \circ x(t)$  und  $x(t) \circ \bullet S(f)$  verwendet.  $S(f)$  gibt die Verteilung der Amplitude über der Frequenz an und wird daher auch als Fourier-Spektrum oder Amplitudendichtespektrum bezeichnet. Hat das Signal beispielsweise die Dimension einer Spannung, so hat die Fourier-Transformierte die Dimension Vs oder V/Hz. Oft wird auch  $\omega = 2\pi f$  anstelle von  $f$  als Integrationsvariable verwendet. Mit  $d\omega/df = 2\pi$  erhält man dann:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Die Fourier-Transformierte ist im Allgemeinen eine komplexe Funktion. Aufspalten in Real- und Imaginärteil liefert:

$$S(f) = \operatorname{Re}\{S(f)\} + j \operatorname{Im}\{S(f)\} \quad (2.16)$$

Eine komplexe Größe  $z = a + jb$  wird grafisch als Zeiger in der komplexen Ebene dargestellt (Bild 2.10). Auf der x-Achse wird der Realteil und auf der y-Achse der Imaginärteil aufgetragen. Die Länge des Zeigers ist der Betrag  $|z|$ , und der mit der x-Achse gebildete Winkel ist die Phase  $\varphi$  von  $z$ . Für den Real- und den Imaginärteil gilt  $a = |z|\cos\varphi$  bzw.  $b = |z|\sin\varphi$ , und es ist  $z = |z|(\cos\varphi + j\sin\varphi) = |z|e^{j\varphi}$ . Letzteres geht auf die eulersche<sup>3</sup> Beziehung  $\exp(\pm j\theta) = \cos\theta \pm j\sin\theta$  zurück. Für  $S(f)$  erhält man damit:

$$S(f) = |S(f)| e^{j\varphi(f)}$$

$$|S(f)| = \sqrt{\operatorname{Re}^2\{S(f)\} + \operatorname{Im}^2\{S(f)\}} \quad (2.17)$$

$$\varphi(f) = \arg\{S(f)\} = \arctan \frac{\operatorname{Im}\{S(f)\}}{\operatorname{Re}\{S(f)\}} \quad \text{für } \operatorname{Re}\{S(f)\} \geq 0$$

Bevor wir uns mit den Eigenschaften der Fourier-Transformation näher beschäftigen, wollen wir zunächst die Transformierte des Rechteckimpulses mithilfe von Gl. (2.14) bestimmen.

<sup>3</sup> Leonhard Euler (1707–1783), schweizer Mathematiker und Physiker.

### Beispiel 2.3 Fourier-Transformierte des Rechteckimpulses

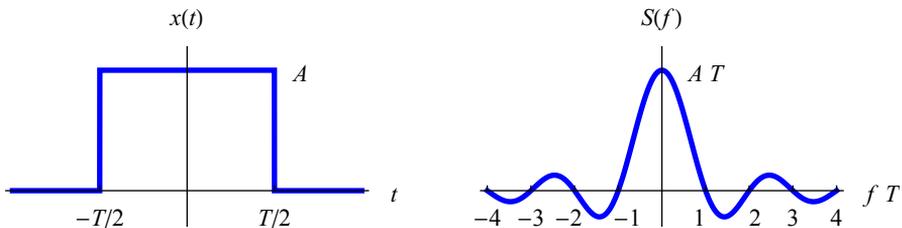
Der Rechteckimpuls  $x(t) = A \operatorname{rect}(t/T)$  hat die Amplitude  $A$  im Intervall  $-T/2 \leq t \leq T/2$  und ist gleich null außerhalb dieses Intervalls (siehe Bild 2.11 links). Die Fourier-Transformierte berechnet sich zu:

$$S(f) = \int_{-T/2}^{T/2} A e^{-j2\pi f t} dt = A \frac{e^{-j\pi f T} - e^{j\pi f T}}{-j2\pi f} \quad (2.18)$$

Ersetzt man die beiden Exponentialfunktionen im Zähler von Gl. (2.18) durch die eulersche Beziehung  $\exp(\pm j\theta) = \cos\theta \pm j \sin\theta$ , so vereinfacht sich der Ausdruck zu:

$$S(f) = A \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} = A T \operatorname{si}(\pi f T) \quad (2.19)$$

In Gl. (2.19) wird die *si-Funktion*  $\operatorname{si}(x) = \sin(x)/x$  eingeführt<sup>4</sup>. Durch Anwendung der Regel von l'Hospital<sup>5</sup> erhält man den Grenzwert für  $x = 0$  zu  $\operatorname{si}(0) = 1$ . Rechts dieses Wertes besteht die Funktion aus einer mit  $1/x$  abklingenden Sinusschwingung. Für negative  $x$ -Werte verläuft die Funktion spiegelsymmetrisch zur  $y$ -Achse (Bild 2.11 rechts).



**Bild 2.11** Der Rechteckimpuls und dessen Fourier-Transformierte

Wichtige Eigenschaften und Theoreme der Fourier-Transformation und die Transformierten der (in der Nachrichtentechnik) bedeutendsten Signale sind in Anhang 2 zu finden. Die Fourier-Transformation ist eine *lineare Transformation*, d. h., es gilt:

$$x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$$

$$S(f) = \mathcal{F}\{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\} = a_1 \mathcal{F}\{x_1(t)\} + a_2 \mathcal{F}\{x_2(t)\}$$

Dies folgt direkt aus dem Einsetzen von  $x(t)$  in das Fourier-Integral. Die Summanden können separat integriert werden, und die konstanten Faktoren  $a_1$  und  $a_2$  können vor die Integrale gezogen werden. Die Transformierte des Dirac-Impulses ergibt sich zu:

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt = e^{-j2\pi f t} \Big|_{t=0} = 1$$

<sup>4</sup> In der englischsprachigen Literatur wird meist die verwandte Funktion  $\operatorname{sinc}(x) = \sin(\pi x)/\pi x$  verwendet. Es ist  $\operatorname{sinc}(x) = \operatorname{si}(\pi x)$ .

<sup>5</sup> Guillaume F. A. l'Hospital (1661–1704.), französischer Mathematiker

Betrachten wir umgekehrt einen Dirac-Impuls im Frequenzbereich, so lautet die Rücktransformierte:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\delta(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f) e^{j2\pi f t} df = e^{j2\pi f t} \Big|_{f=0} = 1$$

Ein Dirac-Impuls im Zeitbereich hat also ein konstantes, von der Frequenz unabhängiges Fourier-Spektrum, während ein Dirac-Impuls im Frequenzbereich einer Konstanten bzw. einem Gleichanteil im Zeitbereich entspricht. Der *Ähnlichkeitssatz* gibt den Zusammenhang zwischen der Transformierten von  $x(t)$  und dem gedehnten Signal  $x(at)$  an. Mit der Substitution  $\lambda = at$  ist:

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) e^{-j2\pi f \lambda/a} d\lambda = \frac{1}{|a|} S\left(\frac{f}{a}\right)$$

Der *Verschiebungssatz* gibt den Zusammenhang zwischen der Transformierten von  $x(t)$  und dem verschobenen Signal  $x(t - t_0)$  an. Mit  $\lambda = t - t_0$  ist:

$$\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) e^{-j2\pi f(\lambda+t_0)} d\lambda = e^{-j2\pi f t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) e^{-j2\pi f \lambda} d\lambda = S(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

Auf ganz ähnliche Weise erhält man den Zusammenhang bei einer Verschiebung im Frequenzbereich:

$$\mathcal{F}^{-1}\{S(f - f_0)\} = x(t) e^{j2\pi f_0 t}$$

#### Beispiel 2.4 Fourier-Transformierte von $a\delta(t - t_0)$

Die Fourier-Transformierte des mit dem Faktor  $a$  gewichteten und an die Stelle  $t_0$  verschobenen Dirac-Impulses lautet:

$$\mathcal{F}\{a\delta(t - t_0)\} = a e^{-j2\pi f t_0} \quad (2.20)$$

Dies ist ein Ergebnis, auf das wir noch häufig zurückgreifen werden. ■

Periodische Signale können nicht mithilfe von Gl. (2.14) transformiert werden, da das Fourier-Integral für diese Signale nicht existiert<sup>6</sup>. Dies hängt damit zusammen, dass sich für solche Signale die Amplitudendichte auf unendlich schmale Bereiche  $\Delta f \rightarrow 0$  konzentriert. Führt man jedoch den Dirac-Impuls  $\delta(f)$  (mit der Einheit 1/Hz) zur Beschreibung solcher Spektren ein, so lassen sich auch für viele periodische Signale deren Fourier-Transformierte angeben.

#### Beispiel 2.5 Fourier-Transformierte des Kosinus- und des Sinussignals

Wir stellen das Kosinussignal  $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$  mit der Amplitude  $A$  und der Frequenz  $f_0$  mithilfe der eulerschen Beziehung  $\exp(\pm j\theta) = \cos\theta \pm j \sin\theta$  durch die Exponentialfunktion dar:

$$A \cos(2\pi f_0 t) = \frac{A}{2} \left( e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t} \right)$$

<sup>6</sup> Eine hinreichende Bedingung für die Existenz des Fourier-Integrals ist die absolute Integrierbarkeit des Signals, d. h., es muss  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$  gelten.

# Index

## A

- A-Kennlinie 75
- Abtasthalteglied 67
- Abtastperiode 62
- Abtastrate 62
- Abtasttheorem 62, 64
  - für Bandpasssignale 68
- Acknowledgement 290
- Additive White Gaussian Noise 59, 124, 140, 203, 237
- Alias-Effekt 64
- ALOHA 280
  - Slotted 281
- Amplituden-Phasenumtastung 193
- Amplitudengang 27
- Amplitudenmodulation 165
  - reine Zweiseitenband-AM 167
  - Störverhalten 170
- Amplitudenumtastung 184
  - Fehlerwahrscheinlichkeit 210, 218
- Anstiegszeit 30
- Anti-Aliasing-Filter 65
- Augendiagramm 114
- Autokorrelationsfunktion 37, 42
  - eines Sprachsignals 83
  - zeitdiskreter Signale 81
- Automatic Repeat Request 290
  - Go-Back- $n$  293
  - Selective Repeat 293
  - Stop-and-Wait 290

## B

- Bandpassrauschen 163
- Bandpasssignal
  - äquivalentes Tiefpasssignal 155
  - Leistungsdichtespektrum 183
- Barker-Folge 151

- BER 123
- Binomialverteilung 48
- bipolares Signal 104
- Bitfehlerhäufigkeit 123
- Bitfehlerwahrscheinlichkeit 49, 122, 123, 126, 131
- Bitrate 104
- Bitraten-Laufzeit-Produkt 292
- Blockcode 240
  - linearer 242
  - perfekter 244
  - systematischer 240
  - zyklischer 250
- Bluetooth 279

## C

- Carrier Sense Multiple Access 282
- Carson-Bandbreite 175
- Chip-Rate 277
- Code-Division Multiple Access 277
  - DS-CDMA 279
  - FH-CDMA 279
- Coderate 241
- Codiergewinn 248
- CRC-Code 254
- Crest-Faktor 229

## D

- Dezibel 29
- Dirac-Impuls 16
  - Siebeigenschaft 18
- DVB 145, 201, 214, 268

## E

- Effektivwert 35, 42

Einheitsimpuls 81  
Einheitssprung 18, 81  
Energie, normierte 35, 81  
Energiedichtespektrum 38  
Energiesignal 35  
Entzerrer  
– adaptiver 141  
– für Bandpasssignale 221  
– MLSE 140  
– MMSE 135, 137  
– Zero-Forcing 135, 137  
Ethernet 283, 287

**F**

Faltung 17  
– diskrete 83  
Faltungscodierung 256  
– Codebaum 257  
– Codiergewinn 264, 265  
– Einflusslänge 256  
– freie Distanz 264  
– Gedächtnisordnung 256  
– Netzdiagramm 257  
– Punktierung 259  
– Zustandsdiagramm 258  
Faltungstheorem 26  
Fensterfunktion 99  
FIR-Filter 95  
– Equiripple 100  
– Impulsantwort 95  
– Kosinus-roll-off 113  
Fourier-Transformation 21  
– diskrete 88  
– schnelle 91  
– zeitdiskreter Signale 87  
Frequency-Division Multiple Access 276  
Frequenzhub 172, 194  
Frequenzmodulation 172  
– Störverhalten 177  
Frequenzumtastung 193  
– Fehlerwahrscheinlichkeit 210, 220

**G**

Gaußverteilung 46

Generatorpolynom 144, 250  
Gleichverteilung 45  
Gold-Folge 278  
Gray-Codierung 106, 186, 192  
Gruppenlaufzeit 31, 98

**H**

Hamming-Code 244  
Hamming-Distanz 241  
Hamming-Gewicht 242  
Hamming-Schranke 243  
Hüllkurve 157

**I**

IIR-Filter 94  
Impulsantwort 16  
– des idealen Bandpasses 34  
– des idealen Tiefpasses 33  
– des RC-Tiefpasses 18  
– des verzerrungsfreien Systems 31  
– zeitdiskrete 84  
Interleaver  
– Blockinterleaver 266  
– Faltungsinterleaver 267  
Internet Protocol  
– IPv4 286  
– IPv6 288  
Intersymbol-Interferenz 108

**J**

Jitter 148

**K**

Kanalkapazität 237  
Korrelationsfilter 126  
Kosinus-roll-off-Filter 111  
Kreuzkorrelationsfunktion 36  
– zeitdiskreter Signale 81

**L**

LDPC-Code 270

Leckeffekt 89  
 Leistung, normierte 35, 42, 82  
 Leistungsdichtespektrum 39, 50  
 – Bandpasssignal 183  
 – digitaler Basisbandsignale 116  
 Leistungssignal 35  
 Leitungscode 104  
 – *nBmB* 107  
 – 2B1Q 106  
 – AMI 105, 118  
 – Manchester 105, 119, 181  
 – NRZI 105, 181  
 Leitungsvermittlung 284  
 LMS-Algorithmus 141  
 LTI-System 16, 53  
 – zeitdiskretes 84

**M**

Matched Filter 126  
 Medium Access Control 276, 284  
 Mehrwegeempfang 32  
 Minimum-Shift Keying 197  
 – Fehlerwahrscheinlichkeit 211  
 – Gaußsches 200  
 Mischer 230  
 Mittelwert 41, 44  
 Modulationsindex  
 – AM 165  
 – FM 173  
 – FSK 194

**N**

Normalverteilung 46  
 NRZ-Signal 104  
 Nyquist-Bandbreite 108  
 Nyquist-Impuls 110  
 Nyquist-Kriterium 110, 114  
 Nyquist-Rate 65

**O**

On-Off-Keying 184

Orthogonal Frequency Division Multiplexing  
 223  
 – Cyclic Prefix 228  
 orthogonale Signale 36  
 OSI-Modell 273

**P**

Paketvermittlung 284  
 parsevalsches Theorem 39  
 Periodogramm 91  
 Phasengang 27  
 Phasenmodulation 172  
 Phasenregelkreis 148, 176, 213  
 Phasenumtastung 186  
 – differenzielle 190  
 – Fehlerwahrscheinlichkeit 207, 219  
 – Offset-QPSK 189  
 PN-Folge 143, 278  
 Protocol Data Unit 274  
 Protokollreferenzmodell 274  
 Pulsamplitudenmodulation 108, 129  
 Pulsmodulation 75  
 – adaptive 77  
 – differenzielle 76

**Q**

Quadratur-Amplitudenmodulation 191  
 – Fehlerwahrscheinlichkeit 209  
 Quadratur-Demodulator 203  
 Quadratur-Modulator 182  
 Quadraturkomponente 156  
 Quantisierung  
 – lineare 71  
 – nichtlineare 74  
 Quantisierungsfehler 72  
 Quantisierungskennlinie 71  
 Quantisierungsrauschen 72

**R**

Radio Data System 181  
 Rahmensynchronisation 150  
 Rauschbandbreite 58

Rauschen 55  
– additives 59  
– thermisches 47, 55  
– weißes 55  
Rauschleistungsdichte 55  
Rayleighverteilung 48  
RC-Tiefpass 18, 20, 28, 30  
Reed-Solomon-Code 255  
Riceverteilung 48  
Roll-off-Faktor 111  
Round Trip Delay 292  
RZ-Signal 105

**S**

Sample-Hold-Stufe 67  
Scrambler  
– Fehlermultiplikation 145  
– rahmensynchronisierter 144  
– selbstsynchronisierender 145  
Service Access Point 274  
Service Data Unit 274  
Shannon-Grenze 238  
si-Funktion 23  
si-Verzerrung 68  
Signal-Rausch-Verhältnis 59  
signalangepasstes Filter 126  
Signalraum 182  
Sliding Window 291  
spektrale Effizienz 238  
Spiegelfrequenz 231  
Spreizfaktor 278  
Sprungantwort 18  
– des RC-Tiefpasses 18  
Störabstand 59, 73, 92, 123, 204, 239  
Standardabweichung 41  
Symbolfehlerwahrscheinlichkeit 130, 132  
Symbolrate 106  
Symboltaktsynchronisation 147  
– entscheidungsrückgekoppelte 148  
– Mueller & Müller 148  
Syndrom 246, 252

**T**

Tiefpass  
– FIR 96  
– idealer 33  
– RC 18  
Time-Division Multiple Access 277  
Trägersynchronisation 212  
– entscheidungsrückgekoppelte 213  
Turbo-Code 269

**U**

Überabtastung 65, 68  
Übertragungsbandbreite 108  
– Kosinus-roll-off-Filter 112, 184  
Übertragungsfunktion 27  
– Mehrwegekanal 32  
– RC-Tiefpass 28  
UKW-Rundfunk 180  
unipolares Signal 104  
Unterabtastung 65, 70

**V**

Varianz 41, 45  
Verteilungsfunktion 43  
Viterbi-Decodierung 260  
– Hard-Decision 264  
– Soft-Decision 264  
– Terminierung 262  
Vorwärtsfehlerkorrektur 236

**W**

Wahrscheinlichkeitsdichte 43  
Winkelmodulation 172  
WLAN 229  
Wurzel-Kosinus-roll-off-Filter 128

**Z**

Zufallsprozess 41  
Zweierkomplement 71  
Zwischenfrequenz 230